

低い SN 比の下での離散的フーリエ変換による周波数分析 における偏り誤差と分散の理論解析*

金井 浩・中鉢 憲賢**

(東北大学工学部電気工学科)

(平成 5 年 3 月 3 日受付)

内容梗概 離散的フーリエ変換 (DFT) によって得られたスペクトル推定結果は、原信号に掛けられた窓関数の位置、長さ、形状に強く依存する。従来、様々な応用に対して多くの窓関数が提案されてきたが、これらの解析では、雑音の影響が考慮されていなかった。本論文では、様々な窓関数を用いて、正弦波に DFT を適用して得られた卓越周波数の推定値における推定誤差 (偏り誤差と分散) を、任意の SN 比 (SNR) の下で理論的・定量的に評価するための方法を示す。この評価方法は、ノンパラメトリックなスペクトル推定が用いられる様々な応用分野へ適用することができる。

キーワード 離散的フーリエ変換, 周波数推定, 窓関数, 偏り誤差と分散, パワースペクトル推定
Discrete Fourier transform (DFT), Frequency estimation, Window function, Bias error and variance, Power spectrum estimation

1. ま え が き

高速フーリエ変換 (FFT) アルゴリズム¹⁾ が開発されて以来、離散的フーリエ変換 (DFT) に基づくスペクトル推定に関する研究が広い範囲で行われてきた。DFT は、パラメトリックなスペクトル推定法と比較した場合、周波数分解能など様々な問題があるが、展開する直交関数系が対象とする信号とは独立にあらかじめ設定されているなどの点で、例えば、背景雑音の特性が未知の場合などの信号の分析へも適用できるという優れた特徴を持っている。FFT によるパワースペクトルの高速な推定法は、Bingham²⁾ によって導入され、Welch³⁾ が、一つの対象信号を複数の区間に分け、その区間ごとにペリオドグラムを計算し加算平均する手法を提案し、その平均化の効果は、Nuttall や Carter^{4), 5)} によっても示されている。その他、FFT を用いたパワースペクトル推定に関する研究は多く行われている^{6)~13)}。

このようなパワースペクトル推定においては、よく知られているように、時間信号への窓掛けによって、周波数領域では周波数漏れが生じ¹⁴⁾、その漏れを抑制するための窓関数に関する研究が数多く行われた。これらの評価結果は、Harris¹⁵⁾、Nuttall¹⁶⁾、その他の解説論文や本^{17)~25)} によってまとめられ、また、その他にも数多く

の研究が行われている^{26)~31)}。また、対象とする信号が正弦波で、しかも 1 波長程度の長さしかもたない場合においては、信号に対して掛けられる窓関数の形状、長さ、位置が、その周波数推定結果に大きく影響する。

従来、雑音成分の影響を考慮してこのような周波数漏れの影響を理論的に評価した研究としては、Sakai³¹⁾ が本論文と同様に、ガウス雑音下での正弦波のパワースペクトルによる周波数解析における偏り誤差と推定分散を与えているが、パワースペクトルの平均回数を無限回に設定したときに得られる平均値に対する処理を仮定しており、雑音成分のパワースペクトルは、完全に平坦な周波数特性となっている場合のみを扱っている。しかし実際の分析では、有限長信号を対象とするから、ガウス雑音のパワースペクトルは平坦とはならず、正弦波のピーク周波数推定における分散に大きな影響を与える。

そこで本論文では、様々な窓関数を用いた場合の DFT による周波数分析結果における周波数推定誤差 (偏り誤差と分散) を、任意の SN 比の下で雑音成分を考慮して理論的に評価する。この論文での解析法は、音響・振動のスペクトル推定のほか、例えば、超音波顕微鏡における対象の音響特性の計測³²⁾ などにおいて、雑音下で観測された信号の周波数分析に関する信頼性を評価する上で重要となる。特に、超音波顕微鏡における周波数分析など、Welch によって提案された加算平均によるパワースペクトルの推定法が適用できない場合もあるため、本論文では、上でも述べたようにパワースペクトルの加算平均を行わない場合における周波数推定精度を

* Theoretical evaluation of bias error and variance in DFT-based frequency estimation under low SNR.

** Hiroshi Kanai and Noriyoshi Chubachi (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai, 980)

評価する。

2. 解析する信号の定義

解析対象とする離散信号 $s(n)$ を、次式のように N 点からなる一つの複素正弦波とする。

$$s(n) = A_0 \exp(j\omega_{\text{true}} n T_s) \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \quad (1)$$

ここで、 A_0 , $f_s = 1/T_s$, $\omega_{\text{true}} = 2\pi f_{\text{true}}$ は、おのこの $s(n)$ の振幅、標準化周波数、角周波数である。本論文では、この決定論的正弦波信号 $s(n)$ にガウス雑音を表す複素信号 $n(n)$ が加わった複素観測信号 $y(n)$ から、角周波数 $\omega_{\text{true}} = 2\pi f_{\text{true}}$ を推定する際の推定精度を評価する。また、窓による正弦波の切り出し位置のずれは、(1)式の振幅定数 A_0 を複素数として扱うことによって表すものとする。

通常、周波数分解能を高くするために、Fig. 1(a)に示すように、上記 N 点の信号の後ろに、 $N_0 - N$ 点の零点を加えて全体として N_0 点の信号とした上で周波数解析を行う。 N 点からなる適当な窓関数 $w(n)$ を掛けて得られた N_0 点の信号 $y(n)$ は次式で表される。

$$y(n) = \begin{cases} w(n)\{s(n) + n(n)\}, & \text{if } n=0, 1, \dots, N-1; \\ 0, & \text{if } n=N, N+1, \dots, N_0-1 \end{cases} \quad (2)$$

この $y(n)$ に対して N_0 点の DFT を施して得られるスペクトル $Y(k)$ は、次式で与えられる。

$$Y(k) = S(k) + N(k) \\ = A_0 \sum_{n=0}^{N_0-1} w(n) \exp(j\Omega_k n) + N(k) \quad (3) \\ (k=0, 1, \dots, N_0-1)$$

ここで、

$$\Omega_k = \omega_{\text{true}} T_s - \frac{2\pi k}{N_0} \quad (4)$$

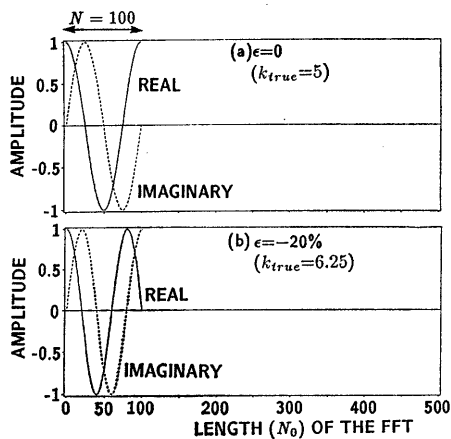


Fig. 1 Two examples of the analyzed complex signal $s(n)$ with the amplitude $A_0=1$ of Eq. (1), where $N=100$ and $N_0=500$.

(a) $\epsilon=0$, (b) $\epsilon=-20\%$.

であり、また、 $S(k)$ と $N(k)$ は、おのこの(2)式の $w(n)s(n)$ と $w(n)n(n)$ の N_0 点スペクトルである。(1)式において、項 $\omega_{\text{true}} n T_s$ が、 2π に等しく、正弦波 $s(n)$ が観測区間の中でちょうど1周期となる場合には、 $w(n)$ として矩形窓を選べば、得られるスペクトル $Y(k)$ は、離散的周波数 $k_{\text{true}} = N_0/N$ においてのみピークを持つ。

しかしながら、SN 比が低い場合、観測信号から1周期に対応する長さを同定することは困難となる。このとき、Fig. 1(a)のように、信号 $s(n)$ の1周期が丁度 N 点ではなく、Fig. 1(b)に示すように1周期が $N \times (1+\epsilon)$ 点で表されるものとする。この場合の卓越周波数に対応する真の周波数 k_{true} は、次式で与えられる。

$$k_{\text{true}} = \frac{N_0}{N(1+\epsilon)} \quad (5)$$

$(1+\epsilon)$ は、観測区間の長さ N に対する、正弦波1周期の長さの比の値を表す。従って、この k_{true} の値は、常に整数になるとは限らず、推定されるスペクトル $Y(k)$ は、窓による影響を強く受けることになる。そこで、本論文では、DFT を用いて得られたスペクトルにおけるこのような窓掛けの影響を、低い SN 比の場合も含め、観測雑音がある場合に関して定量的に評価する手法を述べる。

3. パワースペクトルの確率密度関数の評価

まず、 N_0 点スペクトル $S(k)$ と $N(k)$ を、次式のように各々の実数部と虚数部に分ける。

$$S(k) = S_R(k) + jS_I(k) \quad (6)$$

$$N(k) = N_R(k) + jN_I(k) \quad (7)$$

雑音成分の二つの変数 $N_R(k)$ と $N_I(k)$ は、互いに無関係で、おのこのが、平均零、分散 $\sigma_N^2(k)$ のガウス分布 $N(0, \sigma_N^2(k))$ で表されると仮定する。このとき、雑音成分のパワーは、 k 番目の周波数において、 $2 \times \sigma_N^2(k)$ となる。また、(3)式のスペクトル $Y(k)$ の実数部

$$Y_R(k) = S_R(k) + N_R(k)$$

と、虚数部

$$Y_I(k) = S_I(k) + N_I(k)$$

は、おのこのガウス分布 $N(S_R(k), \sigma_N^2(k))$ と、ガウス分布 $N(S_I(k), \sigma_N^2(k))$ に従うランダム変数となる。

(1)式で述べたように、正弦波 $s(n)$ の窓関数 $w(n)$ により切り出し位置のずれは、振幅定数 A_0 を複素数として扱うことによって表されている。従って、そのスペクトル $S(k)$, $S_R(k)$, $S_I(k)$ においても、切り出し位置によるずれは、複素定数 A_0 に含まれるが、この影響は、後述する(11)式のパワースペクトル $S_R(k)^2 + S_I(k)^2$ においては除かれる。

仮にもし、 $S_R(k)$ と $S_I(k)$ が、同一の値 ($=\mu$) を持つ場合には、これらのパワー成分 $Y_R^2(k)$ と $Y_I^2(k)$ の確率

分布は、同一のカイ 2 乗分布 $\chi^2(n; \mu, \sigma N^2(k))$ で表すことができる。ここで、 n は、自由度を表し、ここでは、 $n=1$ である。従って、 $y(n)$ のパワースペクトル

$$G_y(k) = Y_R^2(k) + Y_I^2(k) \quad (8)$$

の確率分布は、これらの和として、自由度 $n=2$ の通常のカイ 2 乗分布 $\chi^2(n; \mu, \sigma N^2(k))$ で表され、容易に解析することができる。

しかし、上記で仮定した関係式 $S_R(k) = S_I(k)$ が成り立たない場合、 $y(n)$ のパワースペクトル $G_y(k)$ は、自由度 n が 2 の非心カイ 2 乗分布 $\chi^2(n; G_S(k), \sigma N^2(k))$ で表される。以下でその確率密度関数を求める。

一般に n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立、かつ X_i が正規分布 $N(\mu_i, 1)$ に従うとき、確率変数

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad (9)$$

の確率分布は、自由度 n 、非心率 $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$ の非心カイ 2 乗分布に従う。また、その密度関数 $f_{\chi^2}(y; \lambda, 1)$ ($y > 0$) は、次式で与えられる³³⁾⁻³⁵⁾。

$$f_{\chi^2}(y; \lambda, 1) = e^{-\lambda/2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^i \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + i\right) 2^{n/2+i}} e^{-y/2} y^{n/2+i-1} \quad (10)$$

これは、各々の確率変数 X_i の分散がすべて 1 の場合であるから、上記 (8) 式の $y(n)$ のパワースペクトル $G_y(k)$ に関しては、自由度 $n=2$ と設定し、更に、正弦波成分のパワー $G_S(k)$

$$G_S(k) = S_R^2(k) + S_I^2(k) \quad (11)$$

とパワー y の両者をおのおのの雑音のパワー $\sigma N^2(k)$ で正規化した後、(10)式へ代入し、更にこの変数変換に伴う係数 $1/\sigma N^2(k)$ を付けることによって、パワースペクトル $G_y(k)$ の確率密度関数 $f_{\chi^2}(y; G_S(k), \sigma N^2(k))$ を次式で評価することができる。

$$f_{\chi^2}(y; G_S(k), \sigma N^2(k)) = \frac{1}{\sigma N^2(k)} \exp\left(-\frac{G_S(k)}{2\sigma N^2(k)}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{G_S(k)}{2}\right)^i \frac{1}{i! \Gamma(i+1) 2^{i+1}} \times \exp\left\{-\frac{y}{2\sigma N^2(k)}\right\} \left(\frac{y}{\sigma N^2(k)}\right)^i = \frac{1}{2\sigma N^2(k)} \exp\left(-\frac{y+G_S(k)}{2\sigma N^2(k)}\right) \times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(i+1)} \left(\frac{yG_S(k)}{4\sigma N^4(k)}\right)^i \quad (12)$$

ここで、次の m 階第 1 種変形ベッセル関数³⁶⁾ (m : 非負定数)

$$I_m(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(m+i+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2i} \quad (13)$$

の z に $\sqrt{yG_S(k)/\sigma N^4(k)}$ を代入し、 m を 0 とおくことによって、次式を得ることができる。

$$I_0\left(\sqrt{\frac{yG_S(k)}{\sigma N^4(k)}}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(i+1)} \left(\frac{yG_S(k)}{4\sigma N^4(k)}\right)^i \quad (14)$$

この $I_0(\sqrt{yG_S(k)/\sigma N^4(k)})$ を用いて (12) 式を整理すれば、 k 番目の離散的周波数において、パワースペクトル $G_y(k)$ の値がパワー y (> 0) を持つ確率は、次の確率密度関数で表される。

$$f_{\chi^2}(y; G_S(k), \sigma N^2(k)) = \frac{1}{2\sigma N^2(k)} \exp\left(-\frac{y+G_S(k)}{2\sigma N^2(k)}\right) I_0\left(\sqrt{\frac{yG_S(k)}{\sigma N^4(k)}}\right) \quad (15)$$

ここで、 y の増加に伴い上式の第 2 項 $\exp(-y+G_S(k)/2\sigma N^2(k))$ は、指数関数的に減少するが、第 3 項 $I_0(\sqrt{yG_S(k)/\sigma N^4(k)})$ は、指数的に増加する。従って、(15) 式の各項をまず別々に求めて、その積を計算する場合、大きい y の値に対しては、 $f_{\chi^2}(y; G_S(k), \sigma N^2(k))$ の値を求めることができない。

そこで、大きい y に対しても計算できるように以下のような近似式を用いる。修正ベッセル関数 $I_0(z)$ の中の変数 y が 12 より大きい場合、次のような優れた近似式³⁷⁾が利用できる。

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} R_0(z) \quad (z > 12) \quad (16)$$

ここで、

$$R_0(z) \approx \left\{ 1 - \frac{-1 \times (-9)}{2!(8jz)^2} + \frac{-1 \times (-9) \times (-25) \times (-49)}{4!(8jz)^4} - \dots \right\} - j \left\{ \frac{-1}{8jz} - \frac{-1 \times (-9) \times (-25)}{3!(8jz)^3} + \dots \right\} \approx 1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{128z^2} + \frac{225}{3072z^3} + \frac{11025}{98304z^4} \quad (17)$$

(16) 式の z に $\sqrt{yG_S(k)/\sigma N^4(k)}$ を代入して近似式を用いることによって、確率密度関数は、次の (18) 式と (19) 式から求めることができる。

$$f_{\chi^2}(y; G_S(k), \sigma N^2(k)) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma N^2(k)}} \exp\left(-\frac{y+G_S(k)}{2\sigma N^2(k)} + \sqrt{\frac{y+G_S(k)}{\sigma N^4(k)}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\frac{yG_S(k)}{\sigma N^4(k)}}} R_0\left(\sqrt{\frac{yG_S(k)}{\sigma N^4(k)}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma N^2(k)}} \frac{1}{\zeta} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{G_S(k)})^2}{2\sigma N^2(k)}\right) R_0(\zeta) \quad \text{for } y > \frac{144 \times \sigma N^4(k)}{G_S(k)} \quad (18)$$

$$f_{\chi^2}(y; G_S(k), \sigma N^2(k)) = \frac{1}{2\sigma N^2(k)} \exp\left(-\frac{y+G_S(k)}{2\sigma N^2(k)}\right) I_0\left(\sqrt{\frac{yG_S(k)}{\sigma N^4(k)}}\right) \quad \text{for } y \leq \frac{144 \times \sigma N^4(k)}{G_S(k)} \quad (19)$$

ここで、

$$\zeta = \sqrt{yG_S(k)/\sigma N^4(k)} \quad (20)$$

である。以上の変形によって、(18)式を用いれば、(15)式の確率密度関数 $f_{x^2}(y; G_S(k), \sigma_N^2(k))$ は、 $\zeta > 12$, すなわち、 $y > 144 \times \sigma_N^4(k) / G_S(k)$ の場合においても、容易に評価できる。

4. 周波数推定における偏り誤差と分散

k_m 番目の離散的周波数におけるスペクトル成分が、パワースペクトルの全周波数の中で最大ピークとなる確率 $P(k_m)$ は、周波数 k_m におけるパワースペクトルの値 $G_y(k_m)$ が他の周波数の値よりも大きな値を持つ同時確率分布であるから、次式で表すことができる。

$$P(k_m) = \Pr \{ G_y(k_m) > G_y(k_0), G_y(k_m) > G_y(k_1), \dots, G_y(k_m) > G_y(k_{m-1}), G_y(k_m) > G_y(k_{m+1}), \dots, G_y(k_m) > G_y(k_{N-1}) \} \quad (21)$$

$i \neq j$ に対して、周波数 k_i におけるパワーの確率変数 $y_{k_i} \in f_{x^2}(y; G_S(k_i), \sigma_N^2(k_i))$ と、周波数 k_j におけるパワーの確率変数 $y_{k_j} \in f_{x^2}(y; G_S(k_j), \sigma_N^2(k_j))$ は、独立であるから、(21)式的同时確率 $P(k_m)$ は、次式のように整理できる。

$$P(k_m) = \int_{y_{k_m}=0}^{\infty} \int_{y_{k_0}=0}^{y_{k_m}} \dots \int_{y_{k_{N-1}}=0}^{y_{k_m}} \times \prod_{i=0}^{N-1} f_{x^2}(y_{k_i}; G_S(k_i), \sigma_N^2(k_i)) dy_{k_i} = \int_{y_{k_m}=0}^{\infty} f_{x^2}(y_{k_m}; G_S(k_m), \sigma_N^2(k_m)) \times \left\{ \prod_{i=0, i \neq m}^{N-1} F_i(y_{k_m}) \right\} dy_{k_m} \quad (22)$$

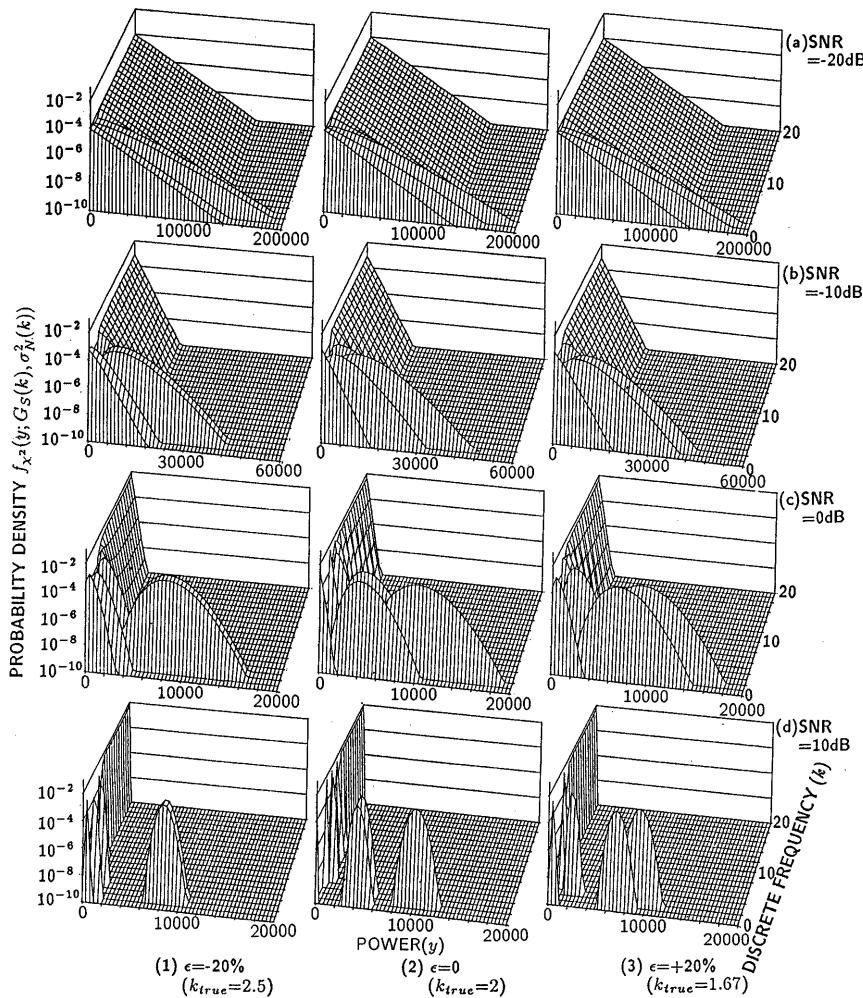


Fig. 2 Probability density function $f_{x^2}(y; G_S(k), \sigma_N^2(k))$ of Eqs. (18) and (19) for four different SNR values and three values of ϵ when a rectangular window is employed, where $N=100$ and $N_0=200$. (a) SNR = -20 dB, (b) SNR = -10 dB, (c) SNR = 0 dB, (d) SNR = +10 dB. (1) $\epsilon = -20\%$ ($k_{true} = 2.5$), (2) $\epsilon = 0$ ($k_{true} = 2$), (3) $\epsilon = +20\%$ ($k_{true} = 1.67$).

ここで、 $F_i(x)$ は、次式で定義される $f_{x^2}(y_{k_i}; G_s(k_i), \sigma_{N^2}(k_i))$ の周辺確率分布関数である。

$$F_i(x) = \int_{y_{k_i}=0}^x f_{x^2}(y_{k_i}; G_s(k_i), \sigma_{N^2}(k_i)) dy_{k_i} \quad (23)$$

観測した正弦波信号の角周波数を、DFT で得られたパワースペクトルにおいて最大パワーを持つ周波数と決定することによって得られる角周波数推定値における偏り誤差 $E[\Delta\omega]$ と分散 $V[\Delta\omega]$ は、(22)式の確率 $P(k)$ から、次式で求めることができる。

$$E[\Delta\omega] = \frac{2\pi}{N} \frac{\sum_{k=\lceil k_{true}-N_0/2 \rceil}^{\lceil k_{true}+N_0/2-1 \rceil} P(k) \cdot (k - k_{true})}{\sum_{k=\lceil k_{true}-N_0/2 \rceil}^{\lceil k_{true}+N_0/2-1 \rceil} P(k)} \quad (24)$$

$$\sqrt{V[\Delta\omega]} = \frac{2\pi}{N} \sqrt{\frac{\sum_{k=\lceil k_{true}-N_0/2 \rceil}^{\lceil k_{true}+N_0/2-1 \rceil} P(k) \cdot (k - k_{true})^2}{\sum_{k=\lceil k_{true}-N_0/2 \rceil}^{\lceil k_{true}+N_0/2-1 \rceil} P(k)}}$$

$$k_{true} \quad [\text{radian}] \quad (25)$$

ここで、(5)式で定義したように、

$$k_{true} = \frac{N_0}{N(1+\epsilon)} \quad (26)$$

であり、また、 2π ラジアンは標準化周波数に対応する。更に、 $\lceil x \rceil$ は、実数 x に最も近い整数を表すものとする。(26)式の k_{true} は、必ずしも整数とはならないが、(24)式と(25)式では、この演算 $\lceil x \rceil$ によって k_{true} に最も近い整数を中心として、 $\pm N_0/2$ 点の範囲での期待値を計算している。

5. 解析結果

3章で述べた方法によって、零点を補った N_0 点からなる(2)式の信号 $y(n)$ に対して、確率密度関数 $f_{x^2}(y)$;

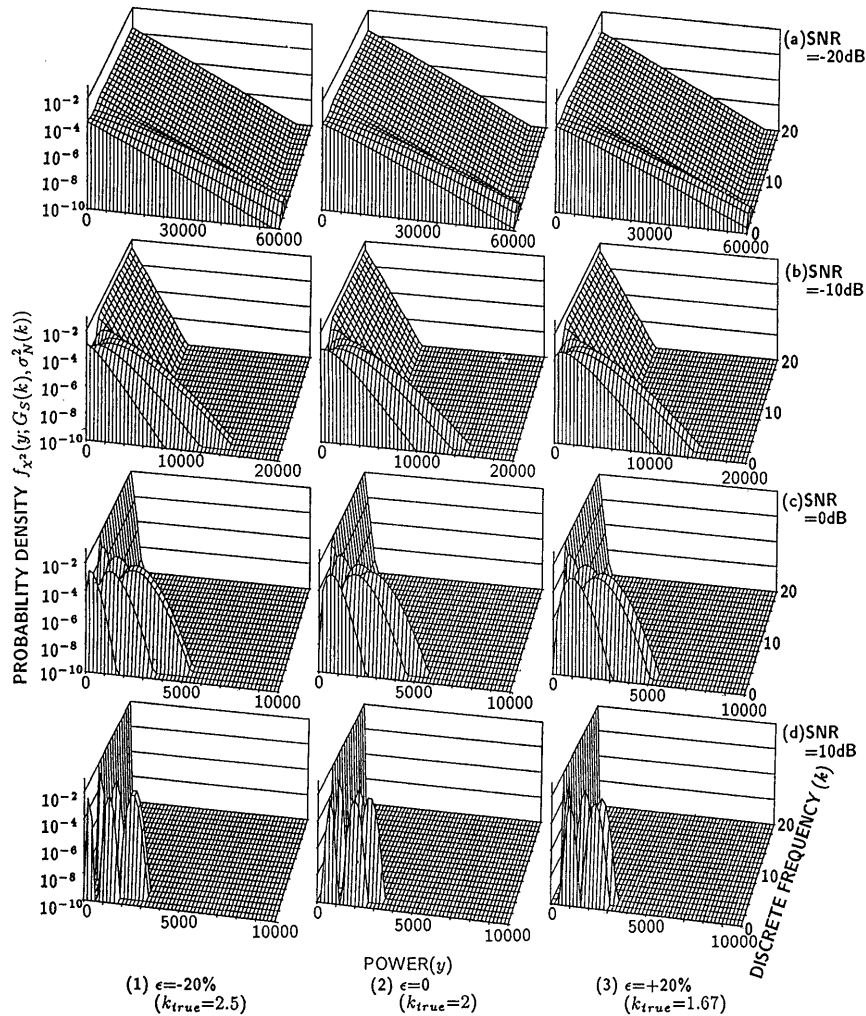


Fig. 3 Probability density function $f_{x^2}(y; G_s(k), \sigma_{N^2}(k))$ of Eqs. (18) and (19) for four different SNR values and three values of ϵ when a Hanning window is employed, where $N=100$ and $N_0=200$.

(a) $SNR=-20$ dB, (b) $SNR=-10$ dB, (c) $SNR=0$ dB, (d) $SNR=+10$ dB.
 (1) $\epsilon=-20\%$ ($k_{true}=2.5$), (2) $\epsilon=0$ ($k_{true}=2$), (3) $\epsilon=+20\%$ ($k_{true}=1.67$).

$G_s(k), \sigma_N^2(k)$ を次のように計算できる。ここでは、代表的窓関数として、矩形窓、ハニング窓、ブラックマンハリス窓を取り上げる。窓関数を次式

$$w(n) = w_0 + w_1 \left\{ \exp\left(j2\pi\frac{n}{N}\right) + \exp\left(-j2\pi\frac{n}{N}\right) \right\} + w_2 \left\{ \exp\left(j2\pi\frac{2n}{N}\right) + \exp\left(-j2\pi\frac{2n}{N}\right) \right\} \quad (27)$$

で一般化して表し、その係数 (w_0, w_1, w_2) を、この3種の窓関数、矩形窓、ハニング窓、ブラックマンハリス窓のおのに対して、(1, 0, 0), (0.5, -0.25, 0), (0.423, -0.249, -0.0396) と設定する。(27)式を用いると、(3)式のスペクトル $Y(k)$ は、次式で与えられる。

$$Y(k) = A_0 \sum_{i=-2}^2 w_i \frac{1 - \exp\left(j\left(\Omega_k + 2\pi\frac{i}{N}\right)N\right)}{1 - \exp\left(j\left(\Omega_k + 2\pi\frac{i}{N}\right)\right)} + N(k) \quad (28)$$

各周波数 k における雑音成分のパワー $2 \times \sigma_N^2(k)$ の値は、時間領域で定められる SN 比 (SNR) の値に対して次のように決定する。まず、(1)式又は(2)式の N 点からなる複素信号 $s(n)$ の全パワー P_s は、 $A_0^2 N$ に等しい。更に(27)式の窓関数 $w(n)$ が採用されたとき、窓を掛けた後の N 点からなる信号 $w(n)s(n)$ の全パワー P_{sw} は、 $P_s = A_0^2 N$ と窓関数のパワー ($w_0^2 + 2w_1^2 + 2w_2^2$) の積であるから次式で表される。

$$P_{sw} = A_0^2 N (w_0^2 + 2w_1^2 + 2w_2^2) \quad (29)$$

一方、窓関数を掛けた後の N 点からなる雑音信号 $w(n)$

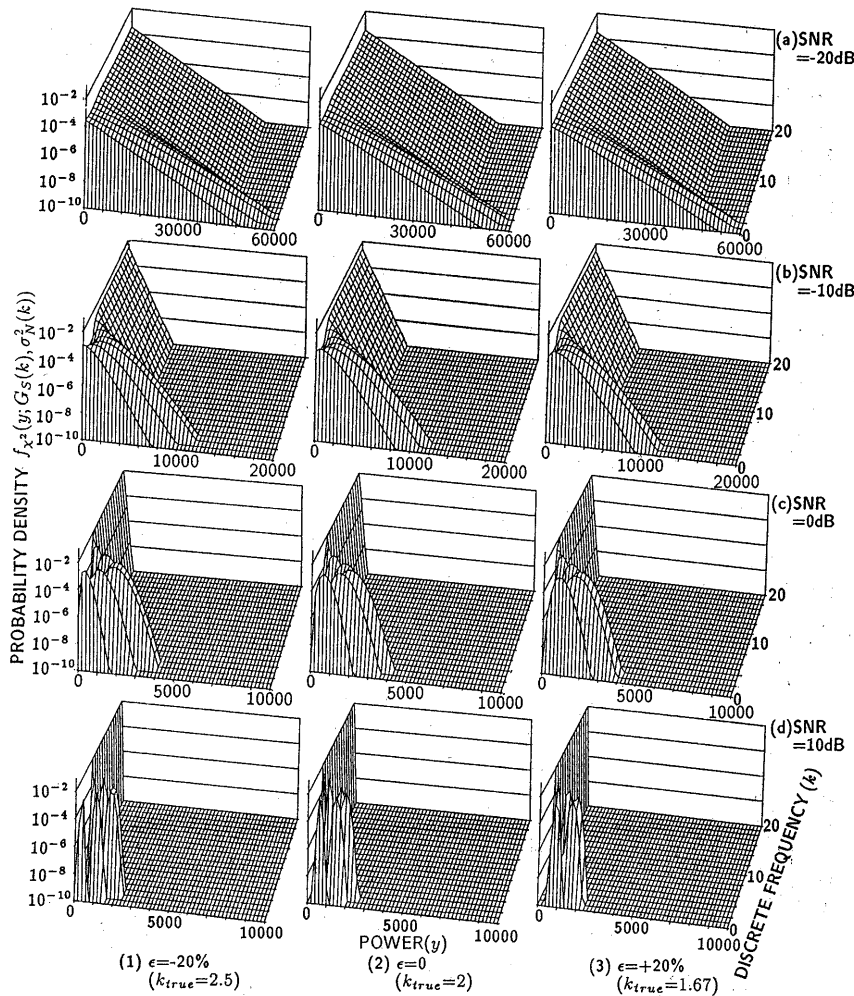


Fig. 4 Probability density function $f_x^2(y; G_s(k), \sigma_N^2(k))$ of Eqs. (18) and (19) for four different SNR values and three values of ϵ when a Blackman-Harris window is employed, where $N=100$ and $N_0=200$.
 (a) SNR = -20 dB, (b) SNR = -10 dB, (c) SNR = 0 dB, (d) SNR = +10 dB.
 (1) $\epsilon = -20\%$ ($k_{true} = 2.5$), (2) $\epsilon = 0$ ($k_{true} = 2$), (3) $\epsilon = +20\%$ ($k_{true} = 1.67$).

$\cdot n(n)$ の全パワーを、 P_{NW} で表すことにする。この N 点からなる信号 $w(n)n(n)$ に零点を補って N_0 点とし、DFT を (3) 式のように $\sum_{n=0}^{N_0-1} w(n)n(n) \exp(-j2\pi k/N_0)$ と定義して適用したときに得られる N_0 点のスペクトルの、各周波数におけるパワー $2 \times \sigma_{N^2}(k)$ は、 N_0 には無関係に元の雑音信号の全パワー P_{NW} に等しいから、

$$P_{NW} = 2 \times \sigma_{N^2}(k) \tag{30}$$

が成立する。SN 比を、

$$SNR = P_{sw}/P_{NW} \tag{31}$$

と定義すれば、(29)、(30)、(31) 式から、雑音の k 番目の周波数におけるパワー $\sigma_{N^2}(k)$ は、次のように設定できる。

$$\begin{aligned} \sigma_{N^2}(k) &= \frac{P_{NW}}{2} \\ &= \frac{P_{sw}}{2 \times SNR} \\ &= \frac{N}{2} A_0^2 (w_0^2 + 2w_1^2 + 2w_2^2) \frac{1}{SNR} \end{aligned} \tag{32}$$

もし、SNR が dB 単位で与えられている場合には、 $\sigma_{N^2}(k)$ は、次式で決定できる。

$$\begin{aligned} \sigma_{N^2}(k) &= \frac{N}{2} A_0^2 (w_0^2 + 2w_1^2 + 2w_2^2) \\ &\cdot \exp\left(-\frac{SNR[\text{dB}]}{10} \log_{10}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

Fig. 2, 3, 4 は、おのおの (2) 式の窓関数を 3 種類、(33) 式の SNR の値を 4 通り、(5) 式で表される ϵ の値を 3 通り変化させて、(18) 式と (19) 式の確率密度関数 $f_{x^2}(y; G_s(k), \sigma_{N^2}(k))$ を評価した結果である。ここで、信号の長さ N と、零点を補った後の信号長 N_0 は、おのおの 100 と 200 に設定している。従って、 $\epsilon = -20\%$ 、 0% 、 $+20\%$ の 3 通りに対する $k_{true} = N_0/N(1+\epsilon)$ の値はおのおの、2.5、2、1.67 となる。従来の標準的な解析手法においては、 $y(n)$ のパワースペクトル $P_y(k)$ が、各周波数 k ごとに $G_s(k) + 2\sigma_{N^2}(k)$ と得られているに過ぎない。しかし、本論文の解析によれば、Fig. 2, 3, 4 のおのおのにおいて、パワースペクトル $P_y(k)$ は、 k 番目の周波数における確率密度関数 $f_{x^2}(y; G_s(k), \sigma_{N^2}(k))$ で与えられる確率分布として表されている。例えば、Fig. 2 においては、矩形窓が選択され、その中の Fig. 2(a-1) は、 $\epsilon = -20\%$ で $SNR = -20$ dB の場合を示している。 $k=4$ よりも大きい離散的周波数においては、

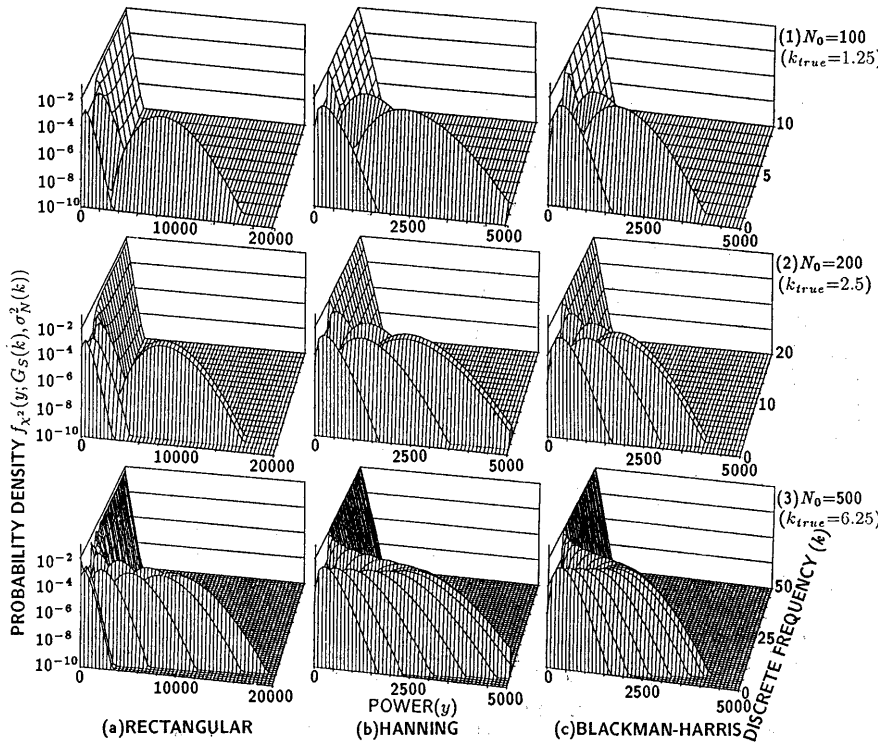


Fig. 5 Probability density function $f_{x^2}(y; G_s(k), \sigma_{N^2}(k))$ of Eqs. (18) and (19) for different three lengths N_0 of the FFT and for the three window functions, where $SNR=0$ dB, $\epsilon = -20\%$, and $N=100$.
 (a) Rectangular window, (b) Hanning window, (c) Blackman-Harris window.
 (1) $N_0=100$ ($k_{true}=1.25$), (2) $N_0=200$ ($k_{true}=2.5$), (3) $N_0=500$ ($k_{true}=6.25$).

$G_s(k)$ はほとんどゼロであり、確率密度分布は、雑音成分 $2\sigma_N^2(k)$ による χ^2 分布を表している。従って、 k 番目の周波数における確率密度関数 $f_{x^2}(y; G_s(k), \sigma_N^2(k))$ の対数値は、 $k=4$ よりも大きい周波数においては、パワー y の増加と共に線形に減少している。

一方、Fig. 2 (d-2) の $\epsilon=0\%$ で $SNR=10$ dB の場合、パワースペクトル $P_y(k)$ は、真の周波数 $k=k_{true}=2$ のまわりに大きな成分を持っている。しかし、Fig. 2(d-1) の $\epsilon=-20\%$ や、Fig. 2 (d-3) の $\epsilon=+20\%$ の場合には、 $k_{true}=1.67$ で整数とはならないため、ピークはおのおの高い周波数と低い周波数へ移行し、かつ、ピーク周波数付近のパワーの最大値は、Fig. 2、(d-2) に比べて多少減少している。また、Fig. 2 において図の下から上へ向かって SN 比が減少するに従って、雑音成分のパワーが増加している。同時にピーク周波数に

おける確率分布 (図の横軸方向の分布) がより広がっている。

Fig. 3 と Fig. 4 では、おのおののハニング窓とブラックマンハリス窓の場合を示しているが、これらの図においても、Fig. 2 の矩形窓の場合における確率密度関数の特性と同様な傾向がある。しかし、ピーク周波数のまわりのメインローブ (図の奥行き方向の軸) に関しては、Fig. 3 と Fig. 4 においては、Fig. 2 の場合よりも広がっている。同時に、ピーク周波数におけるパワー (図の横軸) の最大値が、Fig. 2 の場合よりも減少している。

(2)式において零点を補った信号 $y(n)$ の長さ N_0 を 3 種類変化させ、窓関数 $w(n)$ を 3 種類変化した場合の、(18)式または(19)式の確率密度関数 $f_{x^2}(y; G_s(k), \sigma_N^2(k))$ の計算結果を Fig. 5 に示す。ここでは、 $N=100$, $\epsilon=-20\%$, $SNR=0$ dB と設定している。(1) N_0

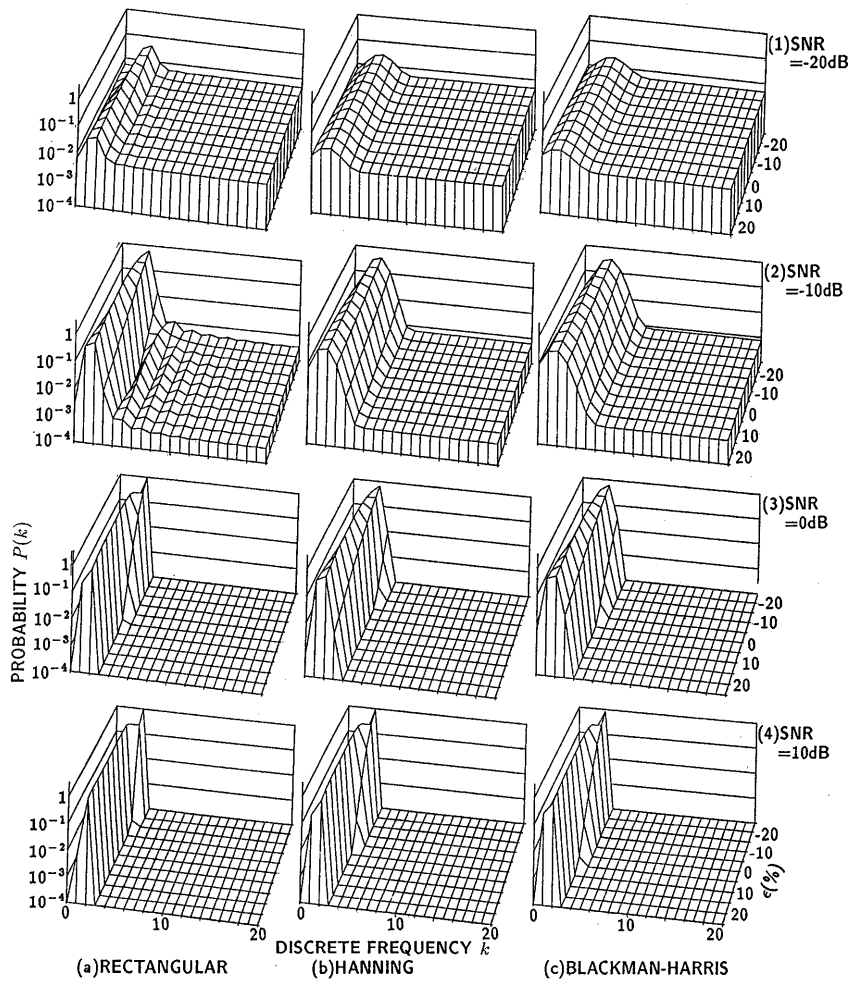


Fig. 6 Probability $P(k)$ of Eq. (22) that the spectrum component at a frequency k has the maximum power in the overall power spectrum for four different SNR values and for three window functions, where $N=100$ and $N=200$.

(a) Rectangular window, (b) Hanning window, (c) Blackman-Harris window.

(1) $SNR=-20$ dB, (2) $SNR=-10$ dB, (3) $SNR=0$ dB, (4) $SNR=+10$ dB.

=100, (2) $N_0=200$, (3) $N_0=500$ に対しておのおの, $k_{true}=1.25, 2.5, 6.25$ となる。ピーク付近の各々の離散的周波数でのパワー方向の分布(横軸方向)は、零点を補った後の信号 $y(n)$ の長さ N_0 が長くなっても、あまり変化がない。しかし、より多くの零点を補うことによって、真のピーク周波数を中心とした分布(図の奥行き方向の分布)が広がり、真のピーク周波数が整数でない場合にも、これらの分布から周波数推定時の偏り誤差が小さくなることを期待できる。

Fig. 6 は、 k 番目の周波数のスペクトル成分がパワースペクトル全体の中で最大振幅となる確率 $P(k)$ を(22)式で計算したもので、(1)から(4)までの4種類の異なる SN 比の値と、(a)から(c)までの3種類の窓関数 $w(n)$ に関して示している。 $N=100, N_0=200$ と設定してあるため、 ϵ の変化に伴って、 k_{true} は、 $k_{true}=2/(1+\epsilon)$ と変化している。SN 比が減少するにつれて(図の下から上に向かって)、真の離散的周波数 k_{true} に最も近い離散的周波数における確率は小さくなり、同時にメインローブの幅が広がっている。更に、上記以外の周波数が最大ピークとなる確率が増加している。また、Fig. 6(b) または Fig. 6(c) を Fig. 6(a) と比較すると、 k_{true} に最も近い離散的周波数が最大ピークとなる確率は、ハンギング窓とブラックマンハリス窓の場合の方が、矩形窓の場合よりも少し小さい。これは、窓のメインローブの幅が広いことによるものである。

Fig. 7 は、SN 比の値による影響を比較するため、Fig. 6(c) のブラックマンハリス窓の場合の確率 $P(k)$ を、(a) $\epsilon=0\%$ と、(b) $\epsilon=-10\%$ の場合に関して再び示している。(a)と(b)に対する k_{true} の値は、おのおの 2, 2.22 である。SN 比が増加するに従って(図中 $\bullet \rightarrow \square \rightarrow \blacktriangle \rightarrow \circ$ の順に)、メインローブが狭くなり、同時に k_{true} に最も近い離散的周波数が最大ピークとなる確率が増加している。

Fig. 8 と Fig. 9 は、おのおの(24)式と(25)式の周波数推定時の偏り誤差 $E[\Delta\omega]$ と分散 $V[\Delta\omega]$ の平方根を示す。各々の値(図の縦軸)は、真の角周波数 $\omega_{true}=2\pi N_0/N(1+\epsilon)$ で正規化されている。この図では、DFT の点数 N_0 を 100, 200, 500 と3種類、SN 比の値を(1)から(4)まで4種類、窓関数 $w(n)$ を(a)から(c)まで3種類変化させて各々の場合の結果を示している。 $N=100$ であるから、 $N_0=100, 200, 500$ のおのおのに対して、 $k_{true}=1/(1+\epsilon), 2/(1+\epsilon), 5/(1+\epsilon)$ と表され、例えば、 $N_0=200$ の場合、 $\epsilon=0\%$ で $k_{true}=2$ 、 $\epsilon=-20\%$ で $k_{true}=2.5$ となる。また、 $N_0=500$ の場合、 $\epsilon=0\%$ で $k_{true}=5$ 、 $\epsilon=11.1\%$ で $k_{true}=4.5$ 、 $\epsilon=25\%$ で $k_{true}=4$ 、 $\epsilon=-9.1\%$ で $k_{true}=5.5$ 、 $\epsilon=-16.7\%$ で $k_{true}=6$ 、 $\epsilon=-23.0\%$ で $k_{true}=6.5$ となる。

Fig. 8 (2)の SNR = -10 dB の場合と、Fig. 8 (1)

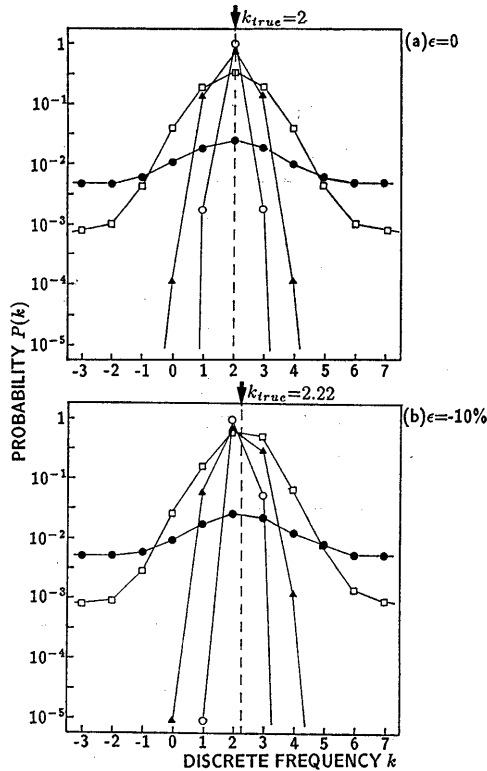


Fig. 7 Probability $P(k)$ in Fig. 6(c) for four different SNR values, where the Blackman-Harris window is employed, $N=100$, and $N_0=200$.

\bullet : SNR = -20 dB, \square : SNR = -10 dB, \blacktriangle : SNR = 0 dB, \circ : SNR = +10 dB.
(a) $\epsilon=0\%$ ($k_{true}=2$), (b) $\epsilon=-10\%$ ($k_{true}=2.22$).

の SNR = -20 dB の場合を比較すると、当然のことながら前者の SN 比の高い方が、偏り誤差が小さい。しかし、Fig. 8 (3)の SNR=0 dB の場合と Fig. 8 (4)の SNR=10 dB の場合においては、SN 比が Fig. 8 (2)の場合よりも更に増加するに従って、逆に偏り誤差が増えている。この理由は、次のように説明できる。Fig. 7 (b)の $\epsilon=-10\%$ の場合に示されているように、SN 比が増加するに従って、メインローブは狭くなっている。同時に、確率 $P(k)$ が大きな値を持つ離散的周波数 $\{k\}$ も k_{true} 付近のごく狭い周波数範囲に限られ、その個数も減少し、この範囲では k_{true} 近傍のずれが明確化する。従って、SNR=0 dB と SNR=-10 dB の場合には、(24)式で計算される離散的周波数の期待値が真の周波数からより大きくずれてしまう。

また、Fig. 9 の周波数推定の分散に関しては、 $N_0=200$ と $N_0=500$ の場合には、 $\epsilon=0\%$ においても分散は零にはなっていない。これは、周波数分解能を上げるために零点を補うことによって、メインローブがより広い範囲を持つことによる。また、Fig. 9 (1), (2), (3) (4)を比較すると、特に $N_0=200$ と $N_0=500$ の場合に

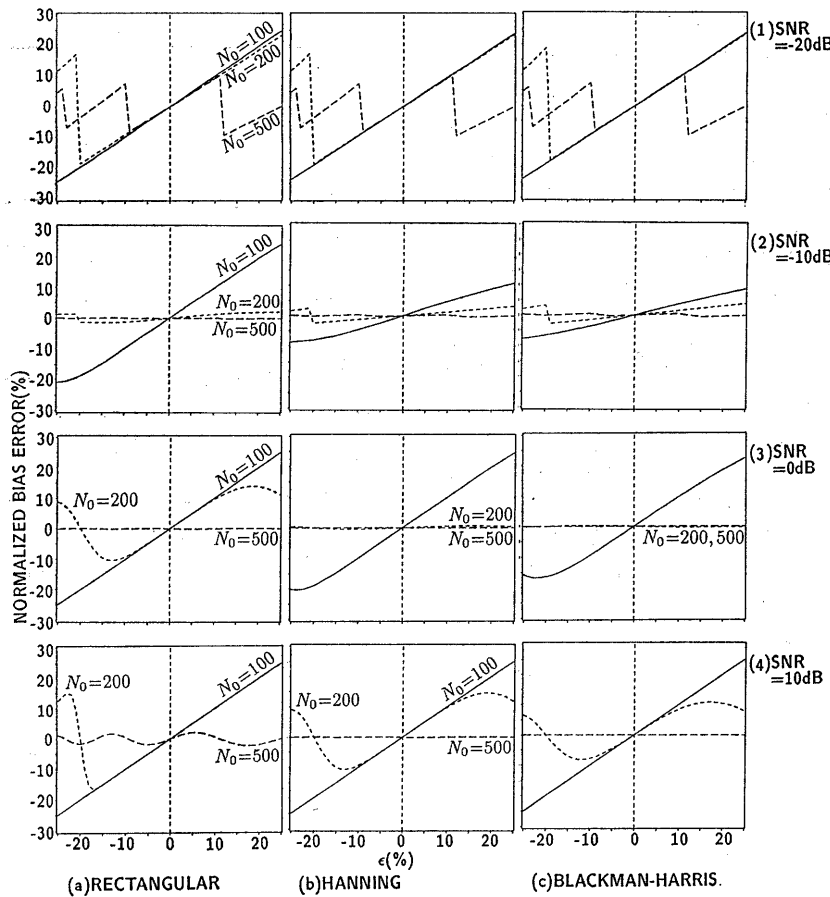


Fig. 8 The normalized bias error $E[d\omega]/\omega_{true}$ of Eq. (22) for different three lengths N_0 of the DFT, for four SNR values, and for the three window functions $w(n)$.
 solid line —: $N_0=100$, dotted line: $N_0=200$, broken line ---: $N_0=500$.
 (a) Rectangular window, (b) Hanning window, (c) Blackman-Harris window.
 (1) SNR=-20 dB, (2) SNR=-10 dB, (3) SNR=0 dB, (4) SNR=+10 dB.

関して、得られた特性に顕著な違いが見られる。Fig. 6 (1)に示されているように、SN 比が-20 dB の場合には、パワースペクトル全体の中では、真の周波数 k_{true} 近傍以外の周波数においても確率 $P(k)$ は非常に小さい値とはならない。従って、これらの雑音成分によって、Fig. 9 (1)で得られた分散は非常に大きくなっている。

しかしながら、SN 比が 0 dB より大きい場合 (Fig. 9 (3)と(4)に対応)、確率 $P(k)$ は、周波数 k_{true} 近傍以外では、非常に小さい値となり、Fig. 6 (3)や Fig. 6 (4)に見られるように、真の周波数 k_{true} 近傍でのみ確率 $P(k)$ は大きな値を持つことになる。従って得られた分散は、Fig. 9 (3)と(4)に示されるように、非常に小さく、この値はメインローブの幅にだけ依存した値となる。

Fig. 8 と 9 から、零点を補ってフーリエ変換を行った方が、周波数推定時の偏り誤差を小さくできる。特に、ハニング窓やブラックマンハリス窓を用いた方が、矩形

窓を用いるよりも偏り誤差を小さくできる。一方、零点を補うことによって推定分散が増加するが、矩形窓を用いた方が、他の窓を用いるよりも分散は小さい。以上のように、周波数推定値の偏り誤差と推定分散は、採用された窓関数、SN 比、零点を補った後の信号の長さ N_0 によって大きく影響を受ける。従って、周波数解析の適用の目的とこれらの図による定量的評価値から、最適な適用条件を決定する必要がある。

6. 結 論

この論文では、DFT による正弦波の周波数推定において、様々な窓関数を用いて、任意の SN 比の下で、周波数推定値の偏り誤差を理論的・定量的に評価するための手法を述べた。また、本手法によって得られた推定誤差の評価値から、各々の周波数においてパワースペクトルが最大のピークとなる確率を定量的に評価した。5章で得られた結果は、従来知られている窓関数の定性的な

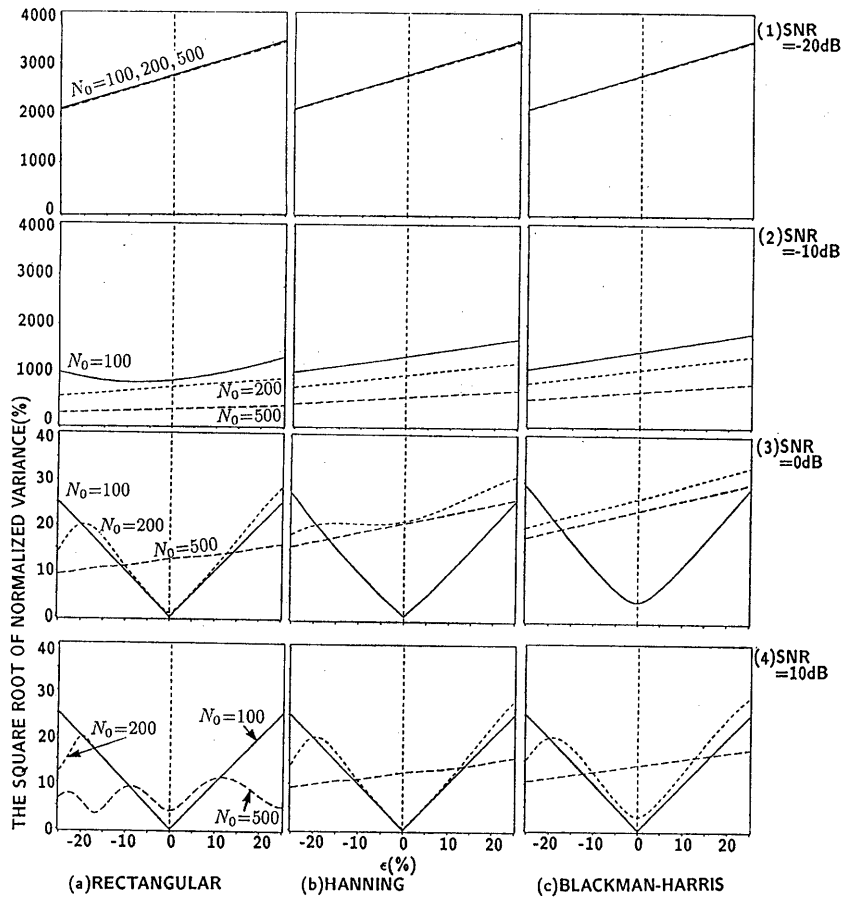


Fig. 9 The normalized square root $\sqrt{V[\Delta\omega]}/\omega_{true}$ of the variance of Eq. (22) for different three lengths N_0 of the DFT, for four SNR values, and for the three window functions $w(n)$. solid line — : $N_0=100$, dotted line : $N_0=200$, broken line - - - : $N_0=500$. (a) Rectangular window, (b) Hanning window, (c) Blackman-Harris window. (1) SNR = -20 dB, (2) SNR = -10 dB, (3) SNR = 0 dB, (4) SNR = +10 dB.

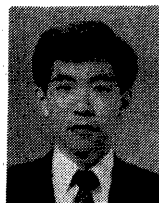
性質を裏付けるものであるが、雑音成分が入った場合の特性も定量化できる特徴がある。従ってこの手法は、ノンパラメトリックなスペクトル推定を用いた各種の計測分野に適用できるものと考えられる。今後、本論文の結果に基づいて任意の SN 比の下での最適な窓の設計法も開発する予定である。

文 献

- 1) J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Math. Comput.* **19**(90), 297-301 (1965).
- 2) C. Bingham, M. D. Godfrey and J. W. Turkey, "Modern techniques of power spectrum estimation," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-15**, 56-66 (1967).
- 3) P. D. Welch, "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodgrams," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-15**, 70-73 (1967).
- 4) A. H. Nuttall and G. C. Carter, "A generalized framework for power spectral estimation," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **ASSP-28**, 334-335 (1980).
- 5) G. C. Carter and A. H. Nuttall, "On the weighted overlapped segment averaging method for power spectral estimation," *Proc. IEEE*, **68**, 1352-1354 (1980).
- 6) W. T. Cochran, J. W. Cooley, D. L. Favin, H. D. Helms, R. A. Kaenel, W. W. Lang, G. C. Maling, Jr., D. E. Nelson, C. M. Rader, P. D. Welch, "What is the fast Fourier transform?," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-15**, 45-55 (1967).
- 7) G. M. Jenkins and D. G. Watts, *Spectral analysis and Its Applications* (Holden-Day, San Francisco, 1968).
- 8) S. Bertram, "On the derivation of the fast Fourier transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-18**, 55-58 (1970).
- 9) T. H. Glisson, C. I. Black and A. P. Sage, "The digital computation of discrete spectra using the fast Fourier transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-18**, 271-287 (1970).
- 10) J. W. Cooley, P. A. W. Lewis and P. D. Welch, "The fast Fourier transform algorithm: Programing considerations in the calculation of sine, cosine, and Laplace transforms," *J. Sound Vib.* **12**, 315-337 (1970).
- 11) J. W. Cooley, P. A. W. Lewis and P. D. Welch, "The

- application of the fast Fourier transform algorithm to the estimation of spectra and cross-spectra," J. Sound Vib. **12**, 339-352 (1970).
- 12) A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975).
 - 13) C. K. Yuen, "A comparison of five methods for computing the power spectrum of a random process using data segmentation," Proc. IEEE **65**, 984-986 (1977).
 - 14) S. Bertram, "Frequency analysis using the discrete Fourier transform," IEEE Trans. Audio Electroacoust. **AU-18**, 495-500 (1970).
 - 15) F. J. Harris, "On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform," Proc. IEEE **66**, 51-83 (1978).
 - 16) A. H. Nuttall, "Some windows with very good side lobe behavior," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. **ASSP-29**, 84-91 (1981).
 - 17) E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974).
 - 18) L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975).
 - 19) R. W. Hamming, *Digital Filters* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975).
 - 20) A. V. Oppenheim, *Application of Digital Signal Processing* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1978).
 - 21) L. R. Rabiner and R. W. Schaffer, *Digital Processing of Speech Signal* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1978).
 - 22) S. M. Kay and S. L. Marple, "Spectrum analysis a modern perspective," Proc. IEEE **69**, 1380-1419 (1981).
 - 23) S. L. Marple, Jr., *Digital Spectra Analysis with Applications* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987), Chap. 5.
 - 24) S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988), Chap. 4.
 - 25) A. Eberhard, "An optimal discrete window for the calculation of power spectra," IEEE Trans. Audio Electroacoust. **AU-21**, 37-43 (1973).
 - 26) H. Babic and G. C. Temes, "Optimum low-order windows for discrete Fourier transform systems," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. **ASSP-24**, 512-517 (1976).
 - 27) J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis* (John Wiley & Sons, New York, 1980).
 - 28) N. R. Strader, II, "Effects of subharmonic frequencies on DFT coefficients," Proc. IEEE **68**, 285-286 (1980).
 - 29) R. J. Webster, "Leakage regulation in the discrete Fourier transform spectrum," Proc. IEEE **68**, 1339-1341 (1980).
 - 30) C.-Y. Chi, D. Long and F.-K. Li, "Roundoff noise

- analysis for digital signal power processors using Welch's power spectrum estimation," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. **ASSP-35**, 784-795 (1987).
- 31) H. Sakai, "Statistical analysis of Pisarenko's method for sinusoidal frequency estimation," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. **ASSP-32**, 95-101 (1984).
 - 32) H. Kanai, N. Chubachi and T. Sannomiya, "Microdefocusing method for measuring acoustic properties using acoustic microscope," IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **39**, 643-652 (1992).
 - 33) T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958).
 - 34) 一松 信, 竹之内脩, 新数学事典 (丸善, 東京, 1991).
 - 35) 柴田義貞著, 正規分布 特性と応用 (東京大学出版会, 東京, 1981), Chap. 2.
 - 36) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信, 数学公式 III (岩波書店, 東京, 1975), p. 170.
 - 37) G. Arfken, *Mathematical Method for Physicists* (Academic Press Inc., Boston, 1970), Ch 1.6.



金井 浩

昭和56年東北大学工学部卒業, 昭和61年同大学院博士課程修了。工学博士。同年東北大学情報処理教育センター助手, 昭和64年東北大学工学部電気工学科助手。講師を経て, 平成4年6月同学科助教授, 現在に至る。音響振動・超音波などの生体情報計測とデジタル信号処理・スペクトル推定に関する研究に従事。昭和62年石川賞, 平成2年本学会粟屋賞, 平成3年電子情報通信学会篠原賞等受賞。日本音響学会, 電子情報通信学会, 電気学会, 日本機械学会, 超音波医学会, 日本ME学会, IEEEの各会員。



中鉢 憲賢

昭和31年東北大学工学部卒業。昭和40年同大学院修了。工学博士。昭和40年東北大学電気通信研究所助手, 昭和41年同研究所助教授, 昭和54年より東北大学工学部電気工学科教授。この間, 30年近くにわたり超音波工学の研究に従事し, 超音波顕微鏡などを日本で初めて開発。平成2年に電気学会学術振興賞(進歩賞), IEEE-UFFC論文誌最優秀論文賞等受賞。電子情報通信学会, 日本音響学会, 応用物理学会, 日本機械学会, IEEE, 超音波医学会, 日本ME学会, 電気学会, 非破壊検査協会の各会員。