

ディレイドブロックコヒーレンス関数による 伝達系の減衰係数の推定*

小野隆彦・大橋正尚・前田利重**

((株)小野測器)

金井 浩***

(東北大学工学部)

(平成元年6月20日受付)

内容梗概 本論文の目的は、分解能偏り誤差の大きさを定量的に評価すると共に、対象とする伝達系のインパルス応答の長さを決定する係数を SN 比と無関係に推定することである。まず、分解能偏り誤差の発生原因である、出力側時間窓から漏れている入力信号と相関のある信号成分が、入出力間に時間遅れを持たせたコヒーレンス関数(本論文では、ディレイドブロックコヒーレンス関数と呼ぶ)で検出可能であることを示す。次に、入出力間の遅れ時間の増加に対する、その値の変化率から、対象とする伝達系の減衰係数が推定できることを示す。ディレイドブロックコヒーレンス関数は、計算量が少なく、しかも、外乱雑音の影響を受けにくいという大きな特徴を持つ。

1. はじめに

信号伝達系の伝達関数を推定する場合、高速フーリエ変換 (FFT) を利用して入出力信号のクロススペクトルと入力信号のパワースペクトルを求め、それらの比から推定することが、一般的に行われる。この場合、伝達系の入力信号と出力信号を離散化するときのサンプリング間隔 τ が観測可能な周波数の上限を決定し、FFT における時間窓長 T ($T = N\tau$, N はサンプル点数) が周波数軸上における分解能を決定する。また、同時に時間窓長 T は、伝達関数の推定誤差のうち、伝達系のインパルス応答の長さに対して、使用した時間窓長が十分でないとき発生する偏り誤差 (分解能偏り誤差) の大きさをも決定する。この分解能偏り誤差は、(1) 入力側の時間窓内の信号に対する応答が、出力側の時間窓の外側に漏れ出し、入力信号と相関のある信号成分が出力側の時間窓にすべて反映されないこと、(2) 入力側の時間窓の開始時刻以前に伝達系へ入力された信号の応答が、出力側の時間窓に含まれることの 2 点によって引き起こされる¹⁾。そのため、伝達系が線形でかつ外乱雑音が存在しない理

想的な条件においても、本来全周波数帯域にわたって 1 を示すべきコヒーレンス関数の値は、特に共振周波数付近において 1 を下回る。この傾向は、対象とする伝達系の Q 値が大きければ大きいほど著しくなる²⁾。従って、分解能偏り誤差の影響を軽減するためには、対象とする伝達系のインパルス応答の長さをあらかじめ推定し、それに見合った時間窓の長さを選択する必要がある。しかし、FFT を利用して推定した伝達関数のインパルス応答は、真のインパルス応答と有限長の時間窓との巡回畳み込みであるため、インパルス応答の長さを厳密に推定することはできない。また、外乱雑音の影響がある場合には、コヒーレンス関数の値が小さくても、それが雑音によるものか、あるいは、分解能偏り誤差によるものかどうかの判別は困難となる。このような場合、分解能偏り誤差の発生を感知するためには、出力信号の時間窓から漏れ出した入力信号に起因する成分の検出を、外乱雑音とは無関係に行えばよい。ところが、そのような検出方法について、詳しく言及した文献は見当たらない。

本論文では、(1) 分解能偏り誤差の発生原因となる、出力側の時間窓から漏れ出した入力信号と相関のある信号成分を検出し評価する方法として入出力間に時間遅れを与えたコヒーレンス関数 (以下、ディレイドブロックコヒーレンス関数) を提案し、理論展開を行う。(2) 次に、計算機シミュレーションにより、ディレイドブロックコヒーレンス関数の有効性を検証する。(3) 最後に、伝達系の共振周波数におけるディレイドブロックコヒー

* Estimation of the damping factor of a signal transmission system by use of a delayed block coherence function.

** Takahiko Ono, Masanao Ohashi, Toshishige Maeda (Ono Sokki Co., Ltd., Tokyo, 163)

*** Hiroshi Kanai (Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai, 980)

レンス関数の値を使用して、対象とする伝達系のインパルス応答の長さを決める定数（減衰係数）を推定する方法について述べる。

本論文で提案するディレイドブロックコヒーレンス関数は、使用する時間窓長が短いため、少ない計算量で演算でき、理論的にはSN比と無関係に減衰係数が推定できる。また、機械構造物のようにインパルス応答の長さが非常に長い系においても、短い時間窓のまま、計算量の莫大な増加を避けながら解析できる。更に、伝達関数が複数のピークを持つ多自由度系においても、1自由度の重ね合わせの原理が利用できるから、それぞれの共振周波数における入力信号と相関のある成分を検出することができる。従って、モード解析など多自由度系の伝達関数を高精度に推定したい場合等への応用も可能である。

2. ディレイドブロックコヒーレンス関数の理論的考察

Fig. 1 に示す伝達系において、系のインパルス応答を $h(t)$ 、入力信号を $x(t)$ 、出力信号を $y(t)$ 、出力信号に混入している外乱雑音を $u(t)$ とし、 $x(t)$ と $u(t)$ は定常白色雑音で互いに無相関であるとする。観測可能な信号は $x(t)$ と $y(t)$ である。このとき、出力信号 $y(t)$ は次式のように表される。

$$y(t) = h(t) * x(t) + u(t) \quad (1)$$

ここに、 $*$ は畳み込み演算を表す。ここで、 τ をサンプリング間隔として(1)式を離散化し、 N 点の離散的フーリエ変換（以下、DFT と呼ぶ）を行うと、(2)式となる。

$$Y(k) = H(k)X(k) + U(k) \quad (2)$$

(2)式の両辺に $X(k)$ の複素共役 $X^*(k)$ を掛け、更に、別の時間窓から同様に得られた結果も含めて多数回平均を行い、入出力間のクロススペクトル $W_{xy}(k)$ を求めると、次式となる。

$$\begin{aligned} W_{xy}(k) &= \langle X^*(k)Y(k) \rangle \\ &= H(k)\langle X^*(k)X(k) \rangle + \langle X^*(k)U(k) \rangle \\ &= H(k)W_{xx}(k) + \langle X^*(k)U(k) \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は多数回平均、 $W_{xx}(k)$ は $\langle X^*(k)X(k) \rangle$ を表す。(3)式の右辺第2項は外乱雑音による項であり、入力信号と外乱雑音との間に相関がないため、平均回数の増加と共に0に漸近し、極限では次式が成り立つ。

$$W_{xy}(k) = H(k)W_{xx}(k) \quad (4)$$

これにより、離散周波数における伝達関数 $H(k)$ が、次

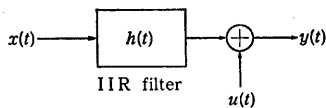


Fig. 1 A signal transmission system used for the computer simulation.

式で推定できる。

$$H(k) = \frac{W_{xy}(k)}{W_{xx}(k)} \quad (5)$$

また、通常のコヒーレンス関数（これを $\gamma_0^2(k)$ と記す）は、次式で与えられる。

$$\gamma_0^2(k) = \frac{|W_{xy}(k)|^2}{W_{xx}(k)W_{yy}(k)} \quad (6)$$

ここに、 $W_{yy}(k)$ は $\langle Y^*(k)Y(k) \rangle$ を表す。

ところが、伝達系のインパルス応答の長さに比して時間窓長が十分でないときには、分解能偏り誤差が発生する。その原因は、時間窓内の入力信号による伝達系の応答が出力側時間窓内から漏れ出すことによるが、その大きさを検出し評価するために、入出力間の時間窓の開始時刻をずらしたディレイドブロックコヒーレンス関数を提案する。

今、対象とする伝達系の入出力信号を、Fig. 2 に示したように、 N 点ごとの時間窓で切り出して、それぞれの時間窓に対して一連の番号をつける。そして、その一つ一つを入力信号は第 i ブロック、出力信号は第 j ブロック (i, j は任意の整数) と呼ぶことにする。まず、入力として第0ブロックだけに着目し、その入力に対する出力側の着目している時間窓内への応答及び、その時間窓から漏れ出ている応答の評価を行う。このために、第0ブロックの入力信号 $x_0(n)$ による伝達系の応答信号のうち、第 j ブロック (j は0以上の整数) 内の成分に外乱雑音を加わった出力信号を $y_j(n)$ とする。 $x_0(n)$ と $y_j(n)$ の N 点 DFT をおのおの $X_0(k)$ と $Y_j(k)$ とし、これらの間の伝達関数 $H_j(k)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H_j(k) &= \frac{\langle X_0^*(k)Y_j(k) \rangle}{\langle X_0^*(k)X_0(k) \rangle} \\ &= \frac{W_{xy0j}(k)}{W_{xx00}(k)} \quad (j=0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $W_{xyij}(k)$ 及び $W_{xxii}(k)$ は、おのおの $X_i(k)$ と $Y_j(k)$ のクロススペクトルの平均値、及び $X_i(k)$ のパワースペクトルの平均値であり、後者は入力信号が定常であれば、入力信号のパワー $\sigma_x^2(k)$ と等しい。また、このようにして求めた $H_j(k)$ は、入力信号のパワーに対して、それと相関のある出力成分とのパワーの比であり、入力信号が定常で伝達系が線形であれば、入力信号の時間窓の番号によらず、入力信号と出力信号とのブロック位置の差 ($j-i$) のみにより決定される。

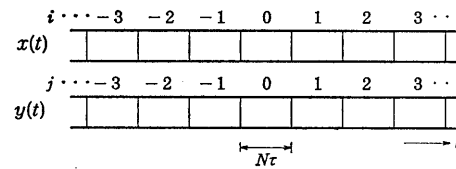


Fig. 2 Segmentation of the input and output signals. One block consists of N point samples.

これらブロックごとの DFT を用いれば、(6)式の通常のコヒーレンス関数 $\gamma_0^2(k)$ は、次式のように記述できる。

$$\gamma_0^2(k) = \frac{|W_{xy00}(k)|^2}{W_{xx00}(k)W_{yy00}(k)} \quad (8)$$

ところで、第0ブロック内の出力信号には、第0ブロック以前の時間窓内の入力信号による伝達系の応答成分が含まれている。従って、第0ブロックの出力のパワースペクトル $W_{yy00}(k)$ は、(7)式で定義した $H_j(k)$ と第0ブロックの出力に入る外乱のスペクトル $U_0(k)$ を用いて、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} W_{yy00}(k) &= \left\langle \left| \sum_{i=-\infty}^0 X_i(k)H_{0-i}(k) + U_0(k) \right|^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left| \sum_{j=0}^{\infty} X_{-j}(k)H_j(k) + U_0(k) \right|^2 \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} W_{xx-j-j}(k) |H_j(k)|^2 + W_{uu00}(k) \\ &= \sigma_x^2(k) \sum_{j=0}^{\infty} |H_j(k)|^2 + \sigma_u^2(k) \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma_x^2(k)$ と $\sigma_u^2(k)$ は、おのおの入力信号と外乱雑音のパワースペクトルの k 番目の周波数成分の真値を示す。また、(7)式から次式が得られる。

$$\begin{aligned} |W_{xy00}(k)|^2 &= |W_{xx00}(k)|^2 |H_0(k)|^2 \\ &= \sigma_x^4(k) |H_0(k)|^2 \quad (10) \end{aligned}$$

従って、(9)式並びに(10)式を利用して、(8)式の通常のコヒーレンス関数 $\gamma_0^2(k)$ は、次式のように書き直される。

$$\gamma_0^2(k) = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |H_i(k)|^2}{|H_0(k)|^2} + \frac{\sigma_u^2(k)}{\sigma_x^2(k) |H_0(k)|^2}} \quad (11)$$

(11)式において、伝達系の共振周波数以外の周波数では $|H_0(k)|^2 \gg |H_1(k)|^2 \gg |H_2(k)|^2 \gg \dots$ であるから、分母第2項はほぼ0となる。従って、 $\gamma_0^2(k)$ の値を減少させる要因は分母第3項の外乱項のみとなり、外乱雑音が全く存在しない場合においては、その値はほぼ1となる。ところが、共振周波数においては、第0ブロックの入力信号に起因する応答が、出力信号の第0ブロックから漏れ出るため $|H_0(k)|^2 > |H_1(k)|^2 > |H_2(k)|^2 > \dots$ となつて、分母第2項が無視できない値となる。このため、外乱雑音がない伝達系においても、 $\gamma_0^2(k)$ の値は1よりも小さな値を示すこととなる。

次に、コヒーレンス関数を求めるにあたり、分析対象とする出力側の時間窓の位置を入力側から、FFT の点数 N を1ブロックとして、 j ブロック ($j > 0$) だけ遅らせて演算することを考える。これが、本論文で提案するディレイドブロックコヒーレンス関数であり、次式で定義する。

$$\gamma_j^2(k) = \frac{|W_{xy0j}(k)|^2}{W_{xx00}(k)W_{yyjj}(k)} \quad (j=1, 2, \dots) \quad (12)$$

ここで、 $W_{xy0j}(k)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} W_{xy0j}(k) &= \left\langle \left\{ \sum_{i=-\infty}^j X_i(k)H_{j-i}(k) + U_j(k) \right\} \cdot X_0^*(k) \right\rangle \\ &= \sigma_x^2(k)H_j(k) \quad (13) \end{aligned}$$

ゆえに、(12)式は(11)式までと同様な計算により、次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} \gamma_j^2(k) &= \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=0(i \neq j)}^{\infty} |H_i(k)|^2}{|H_j(k)|^2} + \frac{\sigma_u^2(k)}{\sigma_x^2(k) |H_j(k)|^2}} \\ &\quad (j=1, 2, \dots) \quad (14) \end{aligned}$$

(14)式は(11)式と同様な性質を持つが、伝達系の共振周波数以外の周波数では $|H_0(k)|^2 \gg |H_1(k)|^2 \gg |H_2(k)|^2 \gg \dots$ により、(14)式の分母第2項は1より十分大きくなり、 $\gamma_j^2(k)$ の値はほぼ0となる。共振周波数においては $|H_0(k)|^2 > |H_1(k)|^2 > |H_2(k)|^2 > \dots$ となつて、 $\gamma_j^2(k)$ の値は0よりも大きなある値を示す。また、(14)式の分母第3項の外乱雑音による項は、(11)式の場合と同様に外乱雑音出力信号に混入するときは、 $\gamma_j^2(k)$ の値を低下させる要因となる。

ここで、伝達系が1自由度系の場合を考える。このとき、系のインパルス応答 $h(t)$ の離散値系列 $h(n)$ は、振幅係数 A 、減衰係数 α 、共振角周波数 ω_0 、初期位相 ϕ を用いて、次式で表される。

$$h(n) = A \exp(-\alpha n \tau) \cos(\omega_0 n \tau + \phi) \quad (15)$$

このとき、(12)式で定義されるディレイドブロックコヒーレンス関数 $\gamma_j^2(k)$ と(6)式の通常のコヒーレンス関数 $\gamma_0^2(k)$ は、おのおの解析的に次式で表すことができる(ただし、これらの式の導出は、付録に述べる)。

$$\begin{aligned} \gamma_j^2(k) &= \frac{P_1(k) \exp[-2\alpha(j-1)N\tau]}{P_0(k) + P_1(k)[1 - \exp(-2\alpha N\tau)] + \frac{\sigma_u^2(k)}{\sigma_x^2(k)}} \\ &\quad (j=1, 2, \dots) \quad (16a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(k) &= \frac{P_0(k)}{P_0(k) + P_1(k)[1 - \exp(-2\alpha N\tau)] + \frac{\sigma_u^2(k)}{\sigma_x^2(k)}} \\ &\quad (16b) \end{aligned}$$

ここで、 N は、コヒーレンス関数を求める際の FFT の分析時間窓点数あるいは、ディレイドブロック一つ当たりの長さを示す。また、 $P_0(k)$ と $P_1(k)$ は (A.20) と (A.13) 式で定義されるが、物理的には、次の意味を持つ。すなわち、 $P_0(k)$ 、 $P_1(k)$ はおのおの、第0ブロック内の入力信号(定常白色雑音)の k 番目の周波数に単位パワーが入力した場合の、伝達系の応答信号の第0ブロック、第1ブロック内の k 番目の周波数成分のパワーの値である。また、第 j ブロック ($j \geq 1$) においては、 $P_1(k)$ の代わりに、遅れによる減衰項 $\exp[-2\alpha(j-1)N\tau]$ を

乗じた $P_1(k)\exp[-2\alpha(j-1)N\tau]$ で与えられる (付録 (A.13)式参照)。また、 α の値が小さな場合、すなわちインパルス応答が長い場合には、次のブロックへ漏れ出す成分が大きくなり、共振周波数において従来用いられるコヒーレンス関数の値 $\gamma_0^2(k)$ よりも $\gamma_j^2(k)$ の方が大きくなる。

ところで、 $j \geq 1$ のディレイドブロックコヒーレンス関数の値を用いて、 $\gamma_j^2(k)$ と $\gamma_{j+1}^2(k)$ との比の値 $\eta(k)$ を求めると、(16 a)式の分母は j に無関係であるから、

$$\eta(k) = \frac{\gamma_{j+1}^2(k)}{\gamma_j^2(k)} = \exp(-2\alpha N\tau) \quad (j=1, 2, \dots) \quad (17)$$

となる。従って、入出力間のブロックディレイ量 j をパラメータとして、 $\eta(k)$ を求めれば、減衰係数 α は次式により推定できる。

$$\alpha = -\frac{1}{2N\tau} \log_e \eta(k) \quad (18)$$

外乱雑音が大きくなって(16 a)式の分母第3項がいかに大きくなろうとも、(17)式は成立する。従って、理論的には SN 比に無関係に α を推定できる。

3. 計算機シミュレーション実験によるディレイドブロックコヒーレンス関数の検討

3.1 計算機シミュレーション実験の内容

本章では、計算機シミュレーションにより、ディレイドブロックコヒーレンス関数の有効性を検討する。データのサンプリング間隔 τ は $30.518 \mu\text{s}$ ($=\frac{1}{32768} \text{ s}$) であり、伝達系は単一共振系からなる双一次変換による IIR 形デジタルフィルタで構成する。このフィルタの共振周波数 f_0 は 5.12 kHz とし、 Q 値は $100, 200, 400, 800$ の4種を用いる。このときの減衰係数 α は、次式で表される。

$$\alpha = \frac{2\pi f_0}{2Q} \quad (19)$$

例えば、 $Q=400$ のとき $\alpha=40.21$ となる。また、インパルス応答の振幅が 60 dB 減衰するまでの時間は、 $Q=400$ のとき 172 ms (サンプル点数にして約 $5,632$ 点)となる。

フィルタへの入力信号及び外乱雑音としては、互いに独立に発生させたガウス性白色雑音を用い、FFT の演算は倍精度で行った。Fig. 3 にこのデジタルフィルタの Q が 400 のとき、インパルス応答から $8,192$ 点の FFT によって求めた伝達関数 (振幅特性・位相特性) を示す。

時間窓の点数 N は、 $128, 256, 512, 1,024$ の4種とし、時間窓長とディレイドブロックコヒーレンス関数の関係を検討した。また、時間窓の形状がディレイドブロックコヒーレンス関数へ与える影響を調べるため、 $N=512$ (すなわち時間窓長にして 15.6 ms) のときに、矩形窓、ハンギング窓、リーマン窓、ブラックマン・ハリス窓、

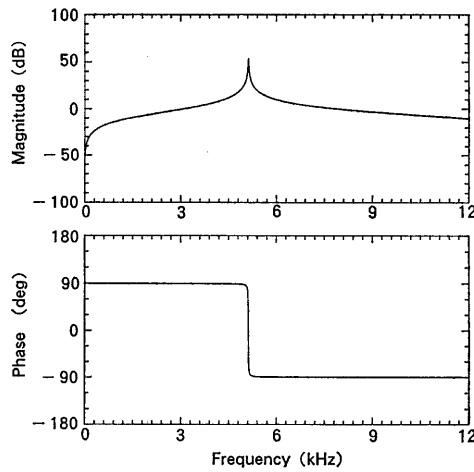


Fig. 3 The frequency response function of the IIR filter obtained by the Fourier transform of the impulse response ($f_0=5.12 \text{ kHz}$, $Q=400$).

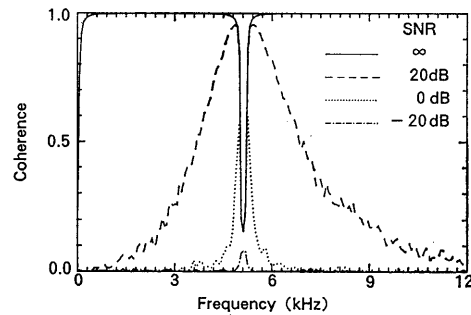


Fig. 4 Dependence of delayed block coherence functions of Signal to Noise Ratio (SNR) for $N=512$ and $j=0$ (no delay).

リース窓の5種について実験を行った。平均回数 M は、すべての場合において 512 回とした。また、外乱雑音を検討するため、SN 比を $\infty, 20 \text{ dB}, 0 \text{ dB}, -20 \text{ dB}$ と変えて実験を行った。

3.2 単一共振系のディレイドブロックコヒーレンス関数

Fig. 4 に、フィルタの Q 値を 400 とし、 $N=512$ (時間窓長 15.6 ms) のハンギング窓を使用し、遅れ時間 0 での SN 比の違いによるディレイドブロックコヒーレンス関数 $\gamma_0(k)$ (この場合は、通常のコヒーレンス関数と同じ) の値を示す。実線で示した SN 比が無限大のときは、伝達系の共振周波数である 5 kHz 近傍のコヒーレンス関数の値が低下しており、それ以外の帯域においてはほぼ 1 の値を示している。共振周波数におけるコヒーレンス関数の低下は、(11)式の分母第2項の分解能偏り誤差によるものである。破線で示す SN 比が 20 dB とやや良好な条件におけるコヒーレンス関数には、(11)式の分母第3項の外乱雑音による値の低下が見られるが、共振周波数付近では SN 比が無限大のときと一致している。つまり、分解能偏り誤差による値の低下が支配的で

あることが分かる。また、点線で示した SN 比が 0 dB の場合にも SN 比が 20 dB の場合と同様の傾向を示し、コヒーレンス関数の値の低下原因が、分解能偏り誤差によるものか外乱雑音によるものかは、この図からでは判別できない。また、一点鎖線で示した SN 比が -20 dB と条件の非常に悪い場合は、共振周波数におけるコヒーレンス関数の値も低下している。

Fig. 5 には、Fig. 4 と同一条件下で、入出力の時間窓の間に 1 ブロック長 (512 点) の遅れ ($j=1$) を持たせた場合のディレイドブロックコヒーレンス関数を表示する。SN 比が ∞ , 20 dB, 0 dB のいずれの場合も、共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値は約 0.3 程度を示し、それ以外の周波数ではほぼ 0 を示している。これは、2 章で述べたように、共振周波数で入力信号と相関のある成分が 512 点の遅れ時間を持った出力側の時間窓に漏れていることを表しており、ディレイドブロックコヒーレンス関数によって、この成分が検出できることを示している。また、SN 比が -20 dB と更に条件の悪い場合には、共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値も低下しているが、分解能偏り誤差の原因である入力信号と相関のある成分は検出できている。また、いずれの SN 比の場合にも、伝達関数の共振周波数以外の周波数において、ディレイドブロックコヒーレンス関数の値がほぼ 0 を示すのは、これらの周波数成分の減衰が大きいためである。

次節より、伝達系の共振周波数 k_0 におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値と、ブロックディレイ量との関係について述べる。

3.3 外乱雑音の影響

Fig. 6 は、入出力間の遅れ時間の単位 j を増加させたときの、共振周波数 k_0 におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値の変化を示した図である。ここでは、 $N=512$ 点 (時間窓長 15.6 ms) のハンニング窓を使用している。従って、 $j=1$ のとき 15.6 ms、 $j=2$ のとき 31.2 ms の遅れがある。この図の縦軸はディレイドブロックコヒーレンス関数の値をデシベルで表示し、横軸は入出力間の遅れ時間である。いずれの SN 比におい

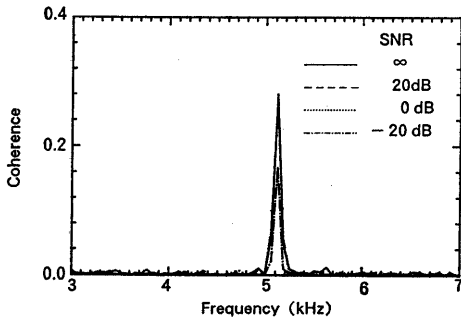


Fig. 5 Dependence of delayed block coherence functions of SNR $N=512$ and $j=1$ (delay).

ても、入出力間の遅れ時間の増加に伴って共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値はほぼ一定の割合で指数的に減少しており、(17)式の説明を裏付けている。また、通常のコヒーレンス関数 $\gamma_0^2(k_0)$ の値は、Fig. 6 における遅れ時間 0 の場合に相当するが、これらの値に比較して $j=1$ におけるディレイドブロックコヒーレンス関数 $\gamma_1^2(k_0)$ の値の方が大きい。この点も(16 a)と(16 b)式の説明を裏付けている。このように、ディレイドブロックコヒーレンス関数は、伝達系の出力側に外乱雑音が混入しているときでも、明確に分解能偏り誤差を検出できる。

3.4 時間窓形状の影響

次に、時間窓の形状を変更したときの、共振周波数 k_0 におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値の変化を調べる。そのため、外乱雑音の混入がない状態で、時間窓の点数 $N=512$ (時間窓長 15.6 ms) の矩形窓、ハンニング窓、リーマン窓、ブラックマン・ハリス窓、リース窓の 5 種について実験を行った。結果を Fig. 7 に示す。使用した時間窓の形状ごとに異なる種類の線で示してあり、ディレイドブロックコヒーレンス関数の値が常にいちばん大きい窓が矩形窓 (実線) で、以下、リース窓 (破線)、リーマン窓 (点線)、ハンニング窓 (一点鎖線)、ブラックマン・ハリス窓 (2 点の鎖線) の順であ

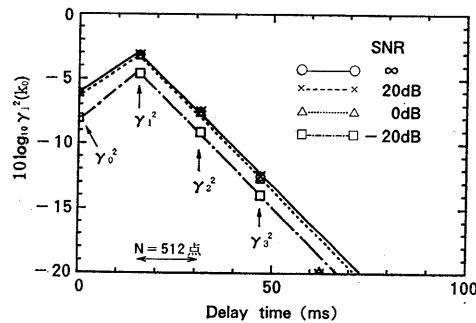


Fig. 6 Delayed block coherence functions at the resonance frequency, k_0 as a function of delay time for various SNRs ($N=512$, $Q=400$).

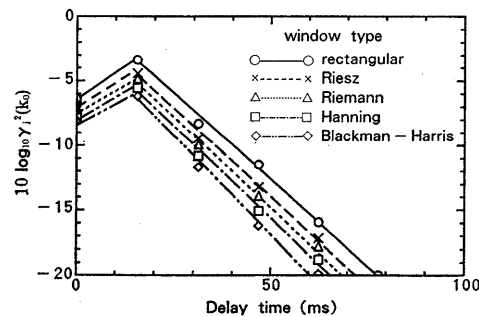


Fig. 7 Delayed block coherence functions at the resonance frequency, k_0 as a function of delay time for various window shapes ($N=512$, $Q=400$, SNR= ∞).

る。Fig. 7によれば、時間窓の形状によりディレイドブロックコヒーレンス関数の示す値はやや異なるが、Fig. 6と同様に各線の傾きはほぼ同じ傾向を示している。すなわち、どの窓関数を用いても、入出力の時間窓間の遅れ時間を増加させると、それに伴って共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数 ($\gamma_j^2(k_0)$, $j=1, 2, \dots$) の値が、指数的に減少している。

3.5 伝達系の尖鋭度 Q の影響

次に、対象とする伝達系の Q 値を変化させたときの共振周波数 k_0 におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値を調べた。Fig. 8 に結果を示す。実験条件は Fig. 7 と同様であり、時間窓には $N=512$ の矩形窓を使用した。図に示されているように、入出力間の遅れ時間の増加に伴って、共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値は指数的に減少している。そして、その傾きは Q 値を2倍にするとほぼ $1/2$ になり、この結果は、(18)式の関係を裏付けている。

3.6 時間窓の点数 N の影響

次に、伝達系の Q 値が400で、時間窓の点数 N を変更したときの共振周波数 k_0 におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値の変化について検討した。結果を Fig. 9 に示す。この図によれば、同一時間遅れにおいては、分析時間窓長 $N\tau$ が長くなると、ディレイドブ

ロックコヒーレンス関数の大きさは1に近づいている。しかし、Fig. 6~8と同様に、時間遅れを増加させると、ディレイドブロックコヒーレンス関数の値はいずれの分析時間窓長によっても同一の割合で指数的に減少している。従って、時間窓長の大小にかかわらず、ディレイドブロックコヒーレンス関数の値の傾きは、ほぼ同様な傾向を示すことが分かる。

3.7 シミュレーション実験結果のまとめ

以上の実験結果から、ディレイドブロックコヒーレンス関数の性質をまとめると、以下ようになる。

- (1) ディレイドブロックコヒーレンス関数により、分解能偏り誤差の原因となる、出力側時間窓から漏れ出した入力信号と相関のある成分の大きさが、検出できる。
- (2) 共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値は、入出力間の遅れ時間を増加させると、指数的に減少する。
- (3) 共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値の遅れ時間に対する変化率 η は、使用する時間窓関数の形状や、時間窓の点数 N , SN 比には、ほとんど依存しない。
- (4) 入出力間の遅れ時間に対する、共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値の変化率 η の自然対数は、伝達系の Q 値に反比例する。

以上のように、ディレイドブロックコヒーレンス関数に関する理論的考察は、実験によって裏付けられた。

4. ディレイドブロックコヒーレンス関数による減衰係数の推定

2章で述べたように、(18)式を用いれば、ディレイドブロックコヒーレンス関数の値の遅れ時間に対する変化率 η から、減衰係数 α を推定することができる。そこで、3.3節で述べたデータを用い、共振周波数において0.001以上の大きさを持つディレイドブロックコヒーレンス関数の値から、(17), (18)式を用いて α を推定した。その結果、SN 比が ∞ , +20 dB, 0 dB, -20 dB の4種の場合に対して、40.25, 40.18, 41.34, 40.46となり、SN 比にほとんど無関係に真値 40.21 にほぼ一致した値が得られた。なお、計算では $N=512$, $\tau=30.518 \mu\text{s}$ を用いた。以上から、共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値の遅れ時間に対する変化率 η を求めれば、伝達系の共振周波数における減衰係数 α を推定できることが実証された。

また、推定された減衰係数 α , 分析窓長 $N\tau$, を用いて、(A. 20)と(A. 13)式から $P_0(k)$ と $P_1(k)$ の値を決定でき、(11)式の分母第2項に相当する分解能偏り誤差の大きさを推定することができる。更に、測定されたディレイドブロックコヒーレンス関数の値をその理論式(A.

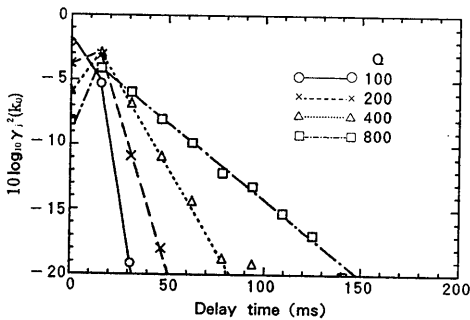


Fig. 8 Delayed block coherence functions at the resonance frequency, k_0 for various Q ($N=512$, $\text{SNR}=\infty$).

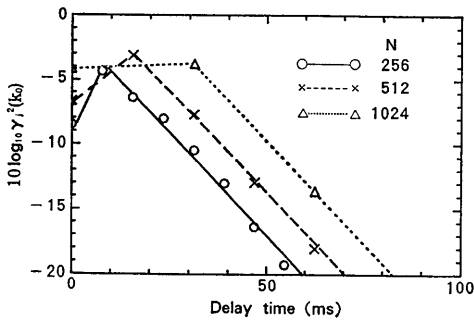


Fig. 9 Delayed block coherence functions at the resonance frequency, k_0 for various N ($Q=400$, $\text{SNR}=\infty$).

23) 又は(A.21)式へ代入し、推定された α の値、分析窓長 $N\tau$ を用いれば、理論式の中で残された未知パラメータであるSN比を推定することもできる。

5. 結 論

本論文では、(1)分解能偏り誤差の発生原因である入力側の時間窓内の信号に対する応答のうち、同時刻の出力側時間窓から漏れている信号成分を検出する方法として、入出力間に時間遅れを持たせたディレイドブロックコヒーレンス関数を提案し、理論的考察と計算機シミュレーションによる検証を行った。更に、(2)伝達系の共振周波数におけるディレイドブロックコヒーレンス関数の値と遅れ時間の関係から、減少係数が推定できることを示した。

ここで新しく提案したディレイドブロックコヒーレンス関数は、対象とする伝達系のインパルス応答の長さに比して、非常に短い時間窓を使っても計算でき、外乱雑音の影響が大きい伝達系でも使用できる。このことは、伝達系の減衰係数が非常に簡便に推定できることを示しており、工学的な応用範囲は広いと考える。

なお、今回は1自由度系を例としたが、今後は更に複雑な系についても同様な検討を行う予定である。また、4節の最後に述べたように、ディレイドブロックコヒーレンス関数を用いて推定された減衰係数 α の値と、本論文で導出されたディレイドブロックコヒーレンス関数の理論式を用いることによって、コヒーレンス関数の分解能偏り誤差の大きさ及びSN比を推定することも可能である。今後これらの手法に関しても実験的検討を行う予定である。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、多大なご指導をいただいた東北大学の鈴木陽一助教授並びに安倍正人助教授、慶應義塾大学の下郷太郎教授並びに吉田和夫助教授に深謝する。

文 献

- 1) 城戸健一、デジタル信号処理入門 (丸善、東京、1985)、pp. 140-142.
- 2) J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980), pp. 112-114.

付録 単一共振系におけるディレイドブロックコヒーレンス関数 $\gamma_m^2(k)$ の理論解

第 i ブロック内の入力信号 $x_i(n)$ による伝達系の応答のうち、第 m ブロックの時間窓内の成分を $z_{im}(n)$ で表す。第 m ブロックの出力信号 $y_m(n)$ には、それ以前のブロック内の入力信号による応答がすべて加わるから、第 m ブロックにおける外乱雑音を $u_m(n)$ として、次式で与えられる。

$$y_m(n) = \sum_{i=-\infty}^m z_{im}(n) + u_m(n) \quad (\text{A.1})$$

各ブロックごとの $x_i(n)$ 、 $z_{im}(n)$ 、 $u_j(n)$ 及び $y_j(n)$ に対して N 点DFTを施して得られるスペクトルを、それぞれ $X_i(k)$ 、 $Z_{im}(k)$ 、 $U_m(k)$ 及び $Y_m(k)$ と表す(k は離散周波数の指標)。(A.1)式を周波数領域で記述すると、

$$Y_m(k) = \sum_{i=-\infty}^m Z_{im}(k) + U_m(k) \quad (\text{A.2})$$

となる。このとき、入力信号 $x_i(n)$ 及び外乱雑音 $u_m(n)$ が定常で互いに無相関な白色雑音であるとすれば、出力信号 $y_m(n)$ のパワースペクトルの平均値は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E[|Y_m(k)|^2] &= E\left[\left|\sum_{i=-\infty}^m Z_{im}(k) + U_m(k)\right|^2\right] \\ &= \sum_{i=-\infty}^m E[|Z_{im}(k)|^2] + E[|U_m(k)|^2] \\ &= \sum_{i=-\infty}^m E[|Z_{im}(k)|^2] + \sigma_u^2(k) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ここに、 $E[\]$ は集合平均を表す。ここで、外乱雑音のパワーを σ_u^2 と置くと、各周波数ごとのパワー $\sigma_u^2(k)$ は $\frac{\sigma_u^2}{N}$ であり、 N 点からなる1ブロックのパワースペクトルの k 番目の周波数成分の値 $E[|U_m(k)|^2]$ は $\sigma_u^2(k)$ で表される。

第0ブロックの入力信号と第 m ブロックの出力信号より得られるディレイドブロックコヒーレンス関数 $\gamma_m^2(k)$ は、“第 m ブロックの観測信号 $y_m(n)$ のパワースペクトル”に対する、“第0ブロックの入力信号 $x_0(n)$ に起因する第 m ブロックの応答信号 $z_{0m}(n)$ のパワースペクトル”の比であるから、次式で表される。

$$\begin{aligned} \gamma_m^2(k) &= \frac{E[|Z_{0m}(k)|^2]}{E[|Y_m(k)|^2]} \\ &= \frac{E[|Z_{0m}(k)|^2]}{\sum_{i=-\infty}^m E[|Z_{im}(k)|^2] + \sigma_u^2(k)} \\ &= \frac{E[|Z_{0m}(k)|^2]}{E[|Z_{00}(k)|^2] + \sum_{i=1}^{\infty} E[|Z_{0i}(k)|^2] + \sigma_u^2(k)} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ここで、入力信号と外乱雑音の定常性を仮定して、

$$\begin{aligned} &\sum_{i=-\infty}^m E[|Z_{im}(k)|^2] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{m-1} E[|Z_{im}(k)|^2] + E[|Z_{mm}(k)|^2] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E[|Z_{0i}(k)|^2] + E[|Z_{00}(k)|^2] \end{aligned}$$

なる関係を用いた。

次に、伝達系が1自由度である場合の $\gamma_m^2(k)$ の厳密な解析解を導出する。1自由度の伝達系であるから、そ

の単位インパルス応答 $h(n)$ は、振幅係数を A 、減衰係数を α 、共振角周波数を ω_0 、初期位相遅れを ϕ 、サンプリング間隔を τ として、

$$\begin{aligned} h(n) &= A \exp(-\alpha n \tau) \cos(\omega_0 n \tau + \phi) \\ &= \frac{A}{2} \{ \exp(j\phi) \exp[(-\alpha + j\omega_0)n\tau] \\ &\quad + \exp(-j\phi) \exp[(-\alpha - j\omega_0)n\tau] \} \quad (\text{A. 5}) \end{aligned}$$

と表すことができる。第 0 ブロック内の p 位置における単位インパルス $\delta(n-p)$ による伝達系の応答信号のうち、第 j ブロックに含まれる応答信号のスペクトルを $F_{0m}(k; p)$ 、($m \geq 1$) とすれば、これは (A. 5) 式の $h(n)$ の $h(n+mN-p)$ から N 点の成分のフーリエ変換によって次式のように定義できる。ただし、式の簡略化のため、以下の展開においては、 $\tau=1$ と置く。

$$F_{0m}(k; p) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n+mN-p) \exp(-j\theta_k n) \quad (m \geq 1) \quad (\text{A. 6})$$

ここで、 $\exp(-j\theta_k)$ は離散周波数 k におけるフーリエ回転子 $\exp(-j2\pi k/N)$ を表す。更に、(A. 5) 式を代入すれば、

$$\begin{aligned} F_{0m}(k; p) &= \frac{A}{2} \exp(j\phi) \exp[(-\alpha + j\omega_0)(mN-p)] \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{N-1} \exp\{[-\alpha + j(\omega_0 - \theta_k)]n\} \\ &\quad + \frac{A}{2} \exp(-j\phi) \exp[(-\alpha - j\omega_0)(mN-p)] \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{N-1} \exp\{[-\alpha - j(\omega_0 + \theta_k)]n\} \\ &= A_0 \exp[(-\alpha + j\omega_0)(mN-p)] \frac{1 - \exp(\Omega_+ N)}{1 - \exp(\Omega_+)} \\ &\quad + A_0^* \exp[(-\alpha - j\omega_0)(mN-p)] \frac{1 - \exp(\Omega_- N)}{1 - \exp(\Omega_-)} \\ &\quad (m \geq 1) \quad (\text{A. 7}) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{A}{2} \exp(j\phi), \quad \Omega_+ = -\alpha + j(\omega_0 - \theta_k), \\ \Omega_- &= -\alpha - j(\omega_0 + \theta_k) \end{aligned}$$

更に、

$$\begin{aligned} H_+(k) &= \frac{A_0}{1 - \exp(\Omega_+)}, \quad H_-(k) = \frac{A_0^*}{1 - \exp(\Omega_-)} \\ C_+(k) &= H_+(k)[1 - \exp(\Omega_+ N)], \\ C_-(k) &= H_-(k)[1 - \exp(\Omega_- N)] \end{aligned}$$

を用いると、 $F_{0m}(k)$ は次のように簡略に表すことができる。

$$\begin{aligned} F_{0m}(k; p) &= C_+(k) \exp[(-\alpha + j\omega_0)(mN-p)] \\ &\quad + C_-(k) \exp[(-\alpha - j\omega_0)(mN-p)] \\ &\quad (m=1, 2, \dots) \quad (\text{A. 8}) \end{aligned}$$

$F_{0m}(k; p)$ を用いることによって、第 0 ブロックの入力 $x_0(n)$ に起因する第 m ブロック ($m \geq 1$) の応答信号

$z_{0m}(n)$ のスペクトル $Z_{0m}(k)$ は、次式で与えられる。

$$Z_{0m}(k) = \sum_{p=0}^{N-1} x_0(p) F_{0m}(k; p) \quad (\text{A. 9})$$

これに、(A. 8) 式を代入すれば、

$$\begin{aligned} Z_{0m}(k) &= C_+(k) \sum_{p=0}^{N-1} x_0(p) \exp[(-\alpha + j\omega_0)(mN-p)] \\ &\quad + C_-(k) \sum_{p=0}^{N-1} x_0(p) \exp[(-\alpha - j\omega_0)(mN-p)] \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

また、 $Z_{0m}(k)$ のパワースペクトルは次式で表される。

$$\begin{aligned} E[|Z_{0m}(k)|^2] &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{p'=0}^{N-1} E[x_0(p)x_0(p')] F_{0m}(k; p) F_{0m}^*(k; p') \end{aligned}$$

ここで、入力信号 $x_0(n)$ の分散を σ_x^2 と置くと、 $E[x_0(p)x_0(p')] = \sigma_x^2 \delta(p-p')$ が成立する。また、上式では、そのうちの k 番目の周波数成分のパワー $\sigma_x^2(k) = \frac{\sigma_x^2}{N}$ の寄与を考えるから、

$$E[|Z_{0m}(k)|^2] = \sigma_x^2(k) \sum_{p=0}^{N-1} |F_{0m}(k; p)|^2 \quad (\text{A. 11})$$

更に、(A. 10) 式を代入すれば、次のように整理できる。

$$\begin{aligned} E[|Z_{0m}(k)|^2] &= \sigma_x^2(k) [Q_1(k) + Q_2(k) + Q_3(k) \exp(-2j\omega_0 N) \\ &\quad + Q_3^*(k) \exp(2j\omega_0 N)] \exp[-2\alpha(m-1)N] \end{aligned} \quad (\text{A. 12})$$

ここに、

$$\begin{aligned} Q_1(k) &= |C_+(k)|^2 \exp(-2\alpha) \frac{1 - \exp(-2\alpha N)}{1 - \exp(-2\alpha)} \\ Q_2(k) &= |C_-(k)|^2 \exp(-2\alpha) \frac{1 - \exp(-2\alpha N)}{1 - \exp(-2\alpha)} \\ Q_3(k) &= C_+(k) C_-(k) \exp[2(-\alpha + j\omega_0)] \\ &\quad \times \frac{1 - \exp[2(-\alpha + j\omega_0)N]}{1 - \exp[2(-\alpha + j\omega_0)]} \end{aligned}$$

ここで、更に、

$$\begin{aligned} P_1(k) &= Q_1(k) + Q_2(k) + Q_3(k) \exp(-2j\omega_0 N) \\ &\quad + Q_3^*(k) \exp(2j\omega_0 N) \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

と置くと、次式が得られる。

$$E[|Z_{0m}(k)|^2] = \sigma_x^2(k) P_1(k) \exp[-2\alpha(m-1)N] \quad (\text{A. 14})$$

ここで、 $P_1(k)$ は、第 0 ブロック内の入力信号の k 番目の周波数に単位パワーが入力した場合の、伝達系の応答信号の第 1 ブロック内の k 番目の周波数のパワーの値を示す。第 m ブロックのパワーは、更に遅れによる減衰 $\exp[-2\alpha(m-1)N]$ が乗じられている。更に、これを用いて (A. 4) 式の分母第 2 項を求める。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} E[|Z_{0i}(k)|^2] &= \sigma_x^2(k) P_1(k) \sum_{m=1}^{\infty} \exp[-2\alpha(m-1)N] \end{aligned}$$

$$= \sigma_x^2(k) P_1(k) \frac{1}{1 - \exp(-2\alpha N)} \quad (\text{A. 15})$$

また、(A. 9)式において $m=0$ と置けば、第0ブロックの入力信号 $x_0(n)$ に起因する伝達系の応答信号のうち、第0ブロックの成分のスペクトル $Z_{00}(k)$ は、次式で表される。

$$Z_{00}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_0(n) F_{00}(k; p) \quad (\text{A. 16})$$

ただし、 $F_{00}(k; p)$ は(A. 7)式で定義される $F_{0m}(k; p)$ の $m=0$ と置いた場合と異なり、 N 点の長さの窓内で $n=p$ に入ったインパルス応答 $h(n-p)$ 、($p \leq n < N$) に関するフーリエ変換であるから、次式で定義される。

$$F_{00}(k; p) = \sum_{n=p}^{N-1} h(n-p) \exp(-j\theta_p n) \quad (\text{A. 17})$$

更に、(A. 5)式を代入して、(A. 8)式と同様に変形整理すれば、次式が得られる。

$$F_{00}(k; p) = \exp(-j\theta_p p) [H_+(k) \{1 - \exp[\Omega_+(N-p)]\} + H_-(k) \{1 - \exp[\Omega_-(N-p)]\}] \quad (\text{A. 18})$$

(A. 16)式に代入すれば $Z_{00}(k)$ のパワースペクトルの平均値は、次のように表される。

$$\begin{aligned} E[|Z_{00}(k)|^2] &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{p'=0}^{N-1} E[x_0(n) x_0^*(n')] F_{00}(k; p) F_{00}^*(k; p') \\ &= \sigma_x^2(k) \sum_{p=0}^{N-1} |F_{00}(k; p)|^2 \\ &= \sigma_x^2(k) |H_+(k)|^2 \sum_{p=0}^{N-1} |1 - \exp[\Omega_+(N-p)]|^2 \\ &\quad + \sigma_x^2(k) |H_-(k)|^2 \sum_{p=0}^{N-1} |1 - \exp[\Omega_-(N-p)]|^2 \\ &\quad + \sigma_x^2(k) H_+(k) H_+^*(k) \sum_{p=0}^{N-1} \{1 - \exp[\Omega_+(N-p)]\} \{1 - \exp[\Omega_+^*(N-p)]\} \\ &\quad + \sigma_x^2(k) H_+^*(k) H_-(k) \sum_{p=0}^{N-1} \{1 - \exp[\Omega_+^*(N-p)]\} \{1 - \exp[\Omega_-(N-p)]\} \\ &= \sigma_x^2(k) P_0(k) \quad (\text{A. 19}) \end{aligned}$$

ただし、 $P_0(k)$ は次式で与えられ、物理的には、第0ブロック内の入力信号の k 番目の周波数に単位パワーが入力した場合の、伝達系の応答信号の同一ブロック内の k 番目の周波数のパワーの値を示す。

$$\begin{aligned} P_0(k) &= |H_+(k)|^2 \left\{ N - \exp(\Omega_+) \frac{1 - \exp(\Omega_+ N)}{1 - \exp(\Omega_+)} \right. \\ &\quad \left. - \exp(\Omega_+^*) \frac{1 - \exp(\Omega_+^* N)}{1 - \exp(\Omega_+^*)} \right. \\ &\quad \left. + \exp(\Omega_+ + \Omega_+^*) \frac{1 - \exp[(\Omega_+ + \Omega_+^*) N]}{1 - \exp(\Omega_+ + \Omega_+^*)} \right\} \\ &\quad + |H_-(k)|^2 \left\{ N - \exp(\Omega_-) \frac{1 - \exp(\Omega_- N)}{1 - \exp(\Omega_-)} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. - \exp(\Omega_-^*) \frac{1 - \exp(\Omega_-^* N)}{1 - \exp(\Omega_-^*)} \right. \\ &\quad \left. + \exp(\Omega_- + \Omega_-^*) \frac{1 - \exp[(\Omega_- + \Omega_-^*) N]}{1 - \exp(\Omega_- + \Omega_-^*)} \right\} \\ &\quad + H_+(k) H_+^*(k) \left\{ N - \exp(\Omega_+) \frac{1 - \exp(\Omega_+ N)}{1 - \exp(\Omega_+)} \right. \\ &\quad \left. - \exp(\Omega_-^*) \frac{1 - \exp(\Omega_-^* N)}{1 - \exp(\Omega_-^*)} \right. \\ &\quad \left. + \exp(\Omega_+ + \Omega_-^*) \frac{1 - \exp[(\Omega_+ + \Omega_-^*) N]}{1 - \exp(\Omega_+ + \Omega_-^*)} \right\} \\ &\quad + H_+^*(k) H_-(k) \left\{ N - \exp(\Omega_+^*) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1 - \exp(\Omega_+^* N)}{1 - \exp(\Omega_+^*)} - \exp(\Omega_-) \frac{1 - \exp(\Omega_- N)}{1 - \exp(\Omega_-)} \right. \\ &\quad \left. + \exp(\Omega_+^* + \Omega_-) \frac{1 - \exp[(\Omega_+^* + \Omega_-) N]}{1 - \exp(\Omega_+^* + \Omega_-)} \right\} \quad (\text{A. 20}) \end{aligned}$$

以上より、(A. 12)式、(A. 15)式及び(A. 19)式を(A. 4)式に代入すれば、1自由度系のディレイドブロックコヒーレンス関数 $\gamma_m^2(k)$ 、($m \geq 1$) は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \gamma_m^2(k) &= \frac{P_1(k) \exp[-2\alpha(m-1)N]}{P_0(k) + P_1(k) [1 - \exp(-2\alpha N)] + \frac{\sigma_u^2(k)}{\sigma_x^2(k)}} \\ &= \frac{P_1(k) \exp[-2\alpha(m-1)N]}{\frac{P_0(k) + P_1(k) [1 - \exp(-2\alpha N)]}{1 + \left(\frac{1}{\text{SNR}(k)}\right)^2}} \quad (m \geq 1) \quad (\text{A. 21}) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{SNR}(k)$ は出力端での信号対雑音の振幅比の k 番目の周波数成分の値であり、

$$\text{SNR}(k) = \sqrt{\frac{\sigma_x^2(k)}{\sigma_u^2(k)}} \{P_0(k) + P_1(k) [1 - \exp(-2\alpha N)]\}$$

で与えられる。

また、 m が1だけ異なる $\gamma_{m+1}^2(k)$ と $\gamma_m^2(k)$ との比の値 $\eta(k)$ は、次式で与えられる。

$$\eta(k) = \frac{\gamma_{m+1}^2(k)}{\gamma_m^2(k)} = \exp(-2\alpha N) \quad (\text{A. 22})$$

一方、コヒーレンス関数 $\gamma_0^2(k)$ に関しては、(A. 4)式の分母は(A. 21)式と共通であり、分子は(A. 19)式を代入することによって、次式で表される。

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(k) &= \frac{P_0(k)}{P_0(k) + P_1(k) [1 - \exp(-2\alpha N)] + \frac{\sigma_u^2(k)}{\sigma_x^2(k)}} \\ &= \frac{P_0(k)}{\frac{P_0(k) + P_1(k) [1 - \exp(-2\alpha N)]}{1 + \left(\frac{1}{\text{SNR}(k)}\right)^2}} \quad (\text{A. 23}) \end{aligned}$$

なお、サンプリング間隔が τ の場合には、(A. 21)式、(A. 22)式及び(A. 23)式において、 N を $N\tau$ に置き換えればよい。