2023 年 8 月 29 日　9：40－10：40

大学院工学研究科	電気エネルギーシステム専攻
	通信工学専攻
	電子工学専攻
大学院情報科学研究科	情報・生命系群
大学院医工学研究科	工学系コース電気・情報系

大学院入学試験問題

基礎科目
Basic Subjects

注意：　６設問中，２問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い．問題は和文と英文を併記してある．

Attention:　Choose 2 questions out of the following 6 questions and answer each of them on a separate answer sheet.　You may use the backside.　Questions are written in both Japanese and English.

2023 年 8 月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

Fig. 1 に示すように，真空中に半径aの完全導体球1と，内，外半径がそれぞれ b , c ($c > b > a$)の完全導体球殻2からなる同心球コンデンサがある．同心球コンデンサ内部（1 − 2間）は真空となっている．導体球1，導体球殻2にそれぞれ電荷Q_1およびQ_2を与えたとき，以下の問に答えよ．ただし，導体球1と導体球殻2の中心Oを原点とする径方向の座標をr，真空中の誘電率をε_0とする．また，無限遠の電位を基準としたときの（無限遠では電位は 0）導体球1の表面の電位をV_a，導体球殻2の外表面の電位をV_cとする．

(1) $r < a$，$a < r < b$，$b < r < c$，$c < r$のそれぞれの領域における電界の大きさ $E(r)$を，ガウスの法則を用いて求めよ．

(2) 電位V_aおよびV_cを求めよ．

(3) 導体球殻2のみを接地したとき（$V_c = 0$）の電位V_aを導出し，同心球コンデンサの静電容量Cを求めよ．

(4) 一方で，導体球1のみを接地したとき($V_a = 0$)の電位V_cを，ε_0，Q_2，a，b ，cを用いて表せ．また， 同心球コンデンサの静電容量C'を求めよ．

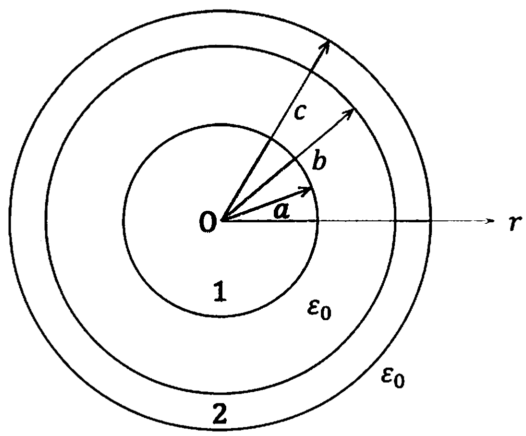

Fig. 1

2023 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(２頁目／２頁中)

As shown in Fig. 1, there is a concentric spherical capacitor in a vacuum consisting of a perfectly conducting sphere 1 with a radius of a and a perfectly conducting spherical shell 2 with inner and outer radii of b and c ($c > b > a$), respectively. The inside of the concentric spherical capacitor (between 1 and 2) is a vacuum. Answer the following questions, when the conducting sphere 1 and the conducting spherical shell 2 are supplied with electric charges Q_1 and Q_2, respectively. Here, let r be the coordinate in the radial direction, with the center O of the conducting sphere 1 and the conducting spherical shell 2 as the origin. The permittivity of the vacuum is ε_0. In addition, with respect to the potential at infinity (at infinity, the potential is 0), let V_a be the potential on the surface of conducting sphere 1 and V_c be the potential on the outer surface of the conducting spherical shell 2.

(1) Find the magnitude of the electric field, $E(r)$, in each of the regions $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$, and $c < r$, using Gauss's law.

(2) Find the potentials V_a and V_c.

(3) Derive the potential V_a when only the conducting spherical shell 2 is grounded ($V_c = 0$), and find the capacitance C of the concentric spherical capacitor.

(4) On the other hand, express the potential V_c in terms of ε_0, Q_2, a, b, and c when only the conducting sphere 1 is grounded ($V_a = 0$). Also, find the capacitance C' of the concentric spherical capacitor.

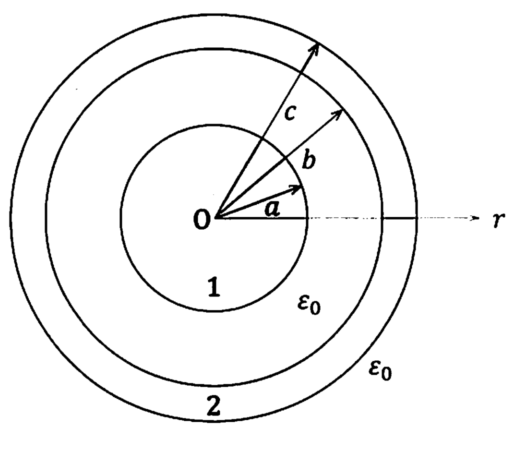

Fig. 1

Question No. 2: Electrical circuits (1／2)

2023 年 8 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目／2 頁中)

(1) Fig. 2(a)の回路において，交流電流源の電流は J [A]，端子 a-b 間の電圧は V [V]，インピーダンスは $Z_1 = 2\ \Omega$，$Z_2 = \mathrm{j}2\ \Omega$ である．電流 J は，並列回路により電流 I_1，I_2 [A] に分流される．電流 J の実効値は 2 A である．電流 J をフェーザの基準とする．I_1，I_2 のフェーザ図を示せ．また，電圧 V の実効値と位相を求めよ．ただし，j は虚数単位である．

(2) Fig. 2(b)の回路において，交流電流源の電流は J [A]，端子 a-b 間の電圧は V [V]，抵抗は R [Ω]，インダクタンスは L [H]，キャパシタンスは C [F]，交流電流源の角周波数は ω [rad/s] である．以下の問に答えよ．

(a)　端子 c-d 間を短絡すると，電圧 V の位相が電流 J の位相より$\pi/4$ rad 進む．ω を R，L，C を用いて表せ．ただし，$\omega > 0$ である．

(b)　端子 c-d 間に抵抗R_S [Ω]の抵抗器をつなぐと，電圧 V と電流 J の位相差が 0 になる．R_S を ω，L，C を用いて表せ．ただし，$0 < \omega < 1/\sqrt{LC}$ である．

(3) Fig. 2(c)の回路において，交流電流源の電流は J [A]，端子 a-b 間の電圧は V [V]，抵抗は R [Ω]，自己インダクタンスは L_1，L_2 [H]，相互インダクタンスは M [H]，キャパシタンスは C [F]，交流電流源の角周波数は ω [rad/s] である．電流 J は，並列回路により電流 I_1，I_2，I_3 [A] に分流される．$I_2 = 2I_1(\neq 0\ \mathrm{A})$，$0 < M < 2L_2 - L_1$のとき，以下の問に答えよ．

(a)　ω を R，L_1，L_2，M，C のうち必要な変数を用いて表せ．ただし，$\omega > 0$ である．

(b)　回路の合成アドミタンス $Y(=J/V)$ [S]を R，L_1，M，ω を用いて表せ．

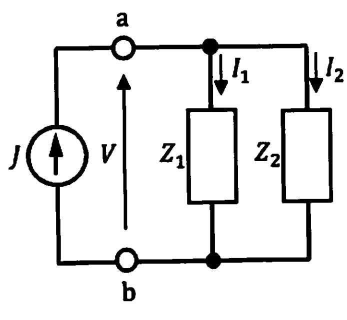

Fig. 2(a)

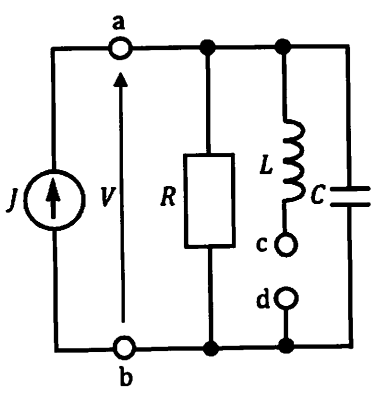

Fig. 2(b)

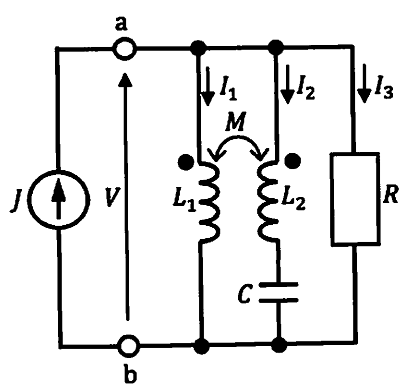

Fig. 2(c)

2023 年 8 月実施
問題 2　電気回路

(1) For the circuit shown in Fig. 2(a), the current of the AC current source is J [A], the voltage between terminals a and b is V [V], the impedances are $Z_1 = 2\ \Omega$ and $Z_2 = \mathrm{j}2\ \Omega$. The current J is divided into currents I_1 and I_2 [A] in the parallel circuit. The effective value of the current J is 2 A. The current J is the reference phasor. Draw the phasor diagrams of I_1 and I_2. In addition, calculate the effective value and the phase of the voltage V. Here, j is the imaginary unit.

(2) For the circuit shown in Fig. 2(b), the current of the AC current source is J [A], the voltage between terminals a and b is V [V], the resistance is R [Ω], the inductance is L [H], the capacitance is C [F], and the angular frequency of the AC current source is ω [rad/s]. Answer the following questions:

(a) When terminals c and d are shorted, the phase of the voltage V leads the phase of the current J by $\pi/4$ rad. Express ω in terms of R, L, and C. Here, $\omega > 0$.

(b) When a resistor with resistance R_S [Ω] is connected between terminals c and d, the phase difference between the voltage V and the current J is 0. Express R_S in terms of ω, L, and C. Here, $0 < \omega < 1/\sqrt{LC}$.

(3) For the circuit shown in Fig. 2(c), the current of the AC current source is J [A], the voltage between terminals a and b is V [V], the resistance is R [Ω], the self-inductances are L_1 and L_2 [H], the mutual inductance is M [H], the capacitance is C [F], and the angular frequency of the AC current source is ω [rad/s]. The current J is divided into the currents I_1, I_2, and I_3 [A] in the parallel circuit. Assuming $I_2 = 2I_1 (\neq 0\ \mathrm{A})$ and $0 < M < 2L_2 - L_1$, answer the following questions:

(a) Express ω using the necessary terms from: R, L_1, L_2, M, and C. Here, $\omega > 0$.

(b) Express the admittance of the circuit $Y(= J/V)$ [S] in terms of R, L_1, M, and ω.

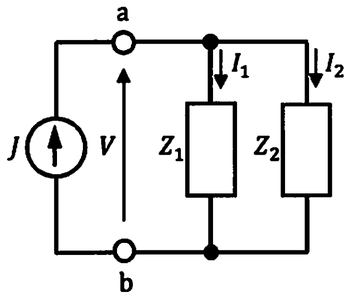

Fig. 2(a)

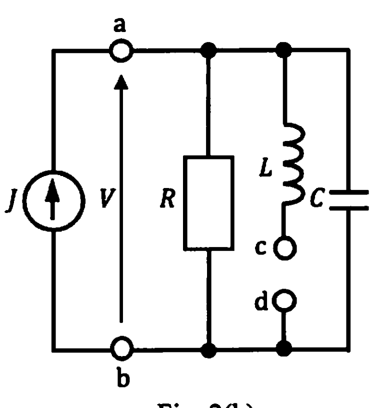

Fig. 2(b)

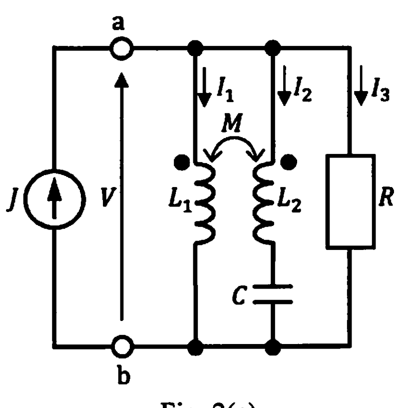

Fig. 2(c)

2023年 8月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／2頁中)

$c_0, c_1, c_2, c_{12}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ を考え，$\cdot, +, \oplus, \bar{}$ は，それぞれ論理積（AND），論理和（OR），排他的論理和（EXOR），否定（NOT）の演算を表すとする．n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の環和（リード・マラー）標準形とは，正リテラルのみからなる積項を排他的論理和の結合で表した式である．例えば，2 変数論理関数の環和標準形の一般形は 4 つの定数 c_0, c_1, c_2, c_{12} を含む次式となる．

$$f(x_1, x_2) = c_0 \oplus c_1 \cdot x_1 \oplus c_2 \cdot x_2 \oplus c_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \tag{3A}$$

この式の各定数に 0 か 1 かを与えることで，2 変数論理関数が定まる．以下の問に答えよ．

(1) 3 変数論理関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ の環和標準形の一般形を考える．

(a) この一般形には，いくつの定数が含まれるか．

(b) この一般形を構成する定数のうち，0 次の積項（変数を含まない項）の定数を c_0 とする．c_0 に関する以下の命題の真偽を判定し，根拠とともに示せ．

(i) $f(0,0,0) = 0$ ならば常に $c_0 = 0$ である．

(ii) $f(1,1,1) = 1$ ならば常に $c_0 = 1$ である．

(2) 2 変数論理関数 $f(x_1, x_2)$ について考える．$f(x_1, x_2)$ が x_1 に依存しているとは，ある $x_2 \in \{0,1\}$ が存在し，$f(0, x_2) \oplus f(1, x_2) = 1$ が成立することである．$x_2 \in \{0,1\}$ であるため，これは次式で言い換えられる．

$$\big(f(0,0) \oplus f(1,0)\big) + \big(f(0,1) \oplus f(1,1)\big) = 1 \tag{3B}$$

同様に，$f(x_1, x_2)$ が x_2 に依存しているとは，ある $x_1 \in \{0,1\}$ が存在し，$f(x_1, 0) \oplus f(x_1, 1) = 1$ が成立することである．$f(x_1, x_2)$ が x_1, x_2 のどちらにも依存しているとき，以下ではその関数を非縮退 2 変数関数と呼ぶ．

(a) 相異なる非縮退 2 変数関数の個数を答えよ．

(b) $f(x_1, x_2)$ が非縮退 2 変数関数であるための必要十分条件を，式 (3A) の定数 c_0, c_1, c_2, c_{12} の積和最簡形論理式で示せ．導出過程も示すこと．

2023年 8月実施
問題3 情報基礎1
(2頁目／2頁中)

Consider $c_0, c_1, c_2, c_{12}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\}$, and let $\cdot, +, \oplus, ^{-}$ respectively denote logical conjunction (AND), logical disjunction (OR), exclusive disjunction (EXOR), and negation (NOT) operations. The ring-sum (Reed-Muller) canonical form of an n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a formula synthesized by exclusive disjunction of product terms of only positive literals. For example, the general form of the ring-sum canonical form of a 2-variable function is given by the following equation, including four constants c_0, c_1, c_2, and c_{12}.

$$f(x_1, x_2) = c_0 \oplus c_1 \cdot x_1 \oplus c_2 \cdot x_2 \oplus c_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \tag{3A}$$

Assigning 0 or 1 to each constant in this equation determines a 2-variable Boolean function. Answer the following questions.

(1) Consider the general form of the ring-sum canonical form of a 3-variable Boolean function $f(x_1, x_2, x_3)$.

- (a) Give the number of constants in this general form.
- (b) Among the constants in this general form, let c_0 be the constant of the 0th degree product term (the term that does not include any variables). Determine whether the following propositions about c_0 are true or false, and justify your answers.
  - (i) If $f(0,0,0) = 0$, then always $c_0 = 0$.
  - (ii) If $f(1,1,1) = 1$, then always $c_0 = 1$.

(2) Consider a 2-variable Boolean function $f(x_1, x_2)$. $f(x_1, x_2)$ is said to depend on x_1 if there exists $x_2 \in \{0,1\}$ such that $f(0, x_2) \oplus f(1, x_2) = 1$ holds. Since $x_2 \in \{0,1\}$, this equation can be rewritten as follows.

$$\big(f(0,0) \oplus f(1,0)\big) + \big(f(0,1) \oplus f(1,1)\big) = 1 \tag{3B}$$

Similarly, $f(x_1, x_2)$ is said to depend on x_2 if there exists $x_1 \in \{0,1\}$ such that $f(x_1, 0) \oplus f(x_1, 1) = 1$ holds. If $f(x_1, x_2)$ depends on both x_1 and x_2, we hereafter refer to the function as a nondegenerate 2-variable function.

- (a) Give the number of distinct nondegenerate 2-variable functions.
- (b) Give the necessary and sufficient condition for $f(x_1, x_2)$ to be a nondegenerate 2-variable function in the simplest sum-of-products form of the constants c_0, c_1, c_2, and c_{12} in equation (3A). Show also the derivation process.

2023 年 8 月実施
問題 4　情報基礎 2
(1頁目／2 頁中)

以下の問に答えよ．ただし，A, B, C, D, E は集合を表す．

(1) $f: A \to B$ を A から B への写像とし，任意の $A' \subseteq A$ に対し $f(A') = \{b \mid b = f(a)$ となる $a \in A'$ が存在$\}$ とする．

(a) 任意の $A_1, A_2 \subseteq A$ に対し，$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つことを証明せよ．

(b) $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ となる f および $A_1, A_2 \subseteq A$ の具体例を与えよ．

(2) 写像 $f: A \to B$, $g: B \to C$ に対し，合成写像 $g \circ f: A \to C$ を考える．ただし，任意の $a \in A$ に対し $g \circ f\,(a) = g\big(f(a)\big)$ とする．

(a) f と g がどちらも 1 対 1 の写像（単射）であるとき，$g \circ f$ は 1 対 1 の写像であることを証明せよ．ここで，写像 $h: D \to E$ が 1 対 1 の写像であるとは，任意の $d_1, d_2 \in D$ に対し $h(d_1) = h(d_2) \implies d_1 = d_2$ が成り立つことである．

(b) f と g がどちらも上への写像（全射）であるとき，$g \circ f$ は上への写像であることを証明せよ．ここで，写像 $h: D \to E$ が上への写像であるとは，各 $e \in E$ に対し $h(d) = e$ となる $d \in D$ が存在することをいう．

2023 年 8 月実施
問題 4　情報基礎 2
(2頁目／2 頁中)

Answer the following questions, where A, B, C, D, and E denote sets.

(1) Let $f: A \to B$ be a mapping from A to B, and let $f(A') = \{ b \mid \text{there exists } a \in A' \text{ such that } b = f(a)\}$ for any $A' \subseteq A$.

(a) Prove that $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ holds for any $A_1, A_2 \subseteq A$.

(b) Give a concrete example of f and $A_1, A_2 \subseteq A$ such that $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(2) Consider a composite mapping $g \circ f: A \to C$ for mappings $f: A \to B$ and $g: B \to C$, where $g \circ f(a) = g\big(f(a)\big)$ for any $a \in A$.

(a) Prove that $g \circ f$ is a one-to-one mapping (injection) when both f and g are one-to-one mappings. Here, $h: D \to E$ is said to be a one-to-one mapping if $h(d_1) = h(d_2) \implies d_1 = d_2$ holds for any $d_1, d_2 \in D$.

(b) Prove that $g \circ f$ is an onto mapping (surjection) when both f and g are onto mappings. Here, $h: D \to E$ is said to be an onto mapping if, for each $e \in E$, there exists $d \in D$ such that $h(d) = e$.

2023 年 8 月実施
問題５　物理基礎
（１頁目／２頁中）

内半径 a の円筒を中心軸 L を含む面で半分に切断したもの（半円筒）を，切断面が上向き，水平になるように床に固定し，その内側に半径 b $(b < a)$，質量 m の一様な密度の球をおく．球を時刻 $t = 0$ において静かにはなした際に，球がすべることなく転がるときの運動について以下の問に答えよ．球の中心 C を通り中心軸 L に垂直な平面で半円筒および球を切った断面図を Fig. 5 に示す．ここで，点 O は中心軸 L 上にあり，OC が鉛直下向きとなす角度を θ とする．また，鉛直下向きの重力加速度の大きさを g，球が回転する角速度を ω とする．

(1) 球の中心 C を通る軸のまわりの慣性モーメント I が

$$I = \frac{2}{5}mb^2$$

となることを示せ．

(2) 球の中心 C は O を中心とした円運動をする．この円運動の接線方向の速度 v を求めよ．

(3) 球の重心運動に関する運動方程式，および球の回転に関する運動方程式を示せ．ここで，球と半円筒との接触点にはたらく摩擦力の大きさを F とせよ．

(4) $\frac{d\theta}{dt}$ と ω の関係を求めよ．また，摩擦力の大きさ F を求めよ．

(5) θ が微小な場合，球の運動が単振動となることを示せ．また，その振動の周期 T を求めよ．

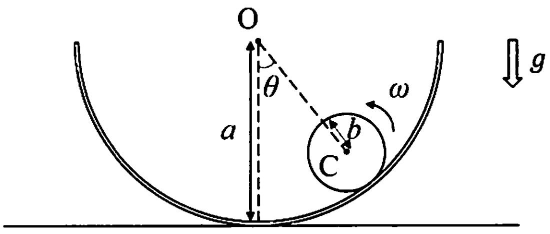

Fig. 5

2023 年 8 月実施
問題５　物理基礎
（２頁目／２頁中）

A cylinder of inner radius a cut in half in the plane containing the central axis L (semi-cylinder) is fixed to the floor with the cut surface facing up and horizontal, and a sphere of uniform density with radius b ($b < a$) and mass m is placed inside the semi-cylinder. Answer the following questions about the motion of the sphere as it rolls without sliding when it is gently released at time $t = 0$. A cross-sectional view of the semi-cylinder and sphere cut by the plane perpendicular to the central axis L and passing through the center C of the sphere is shown in Fig. 5. Here, the point O is on the central axis L, and the angle that OC makes with the vertical downward direction is θ. Furthermore, the magnitude of the vertical downward gravitational acceleration is g, and the angular velocity of the rotation of the sphere is ω.

(1) Show the moment of inertia I of the sphere around the axis passing through its center C is given by

$$I = \frac{2}{5}mb^2.$$

(2) The center C of the sphere moves in a circle around O. Find the velocity v in the direction tangential to this circular motion.

(3) Show the equation of motion for the motion of the center of gravity of the sphere and the equation of motion for the rotation of the sphere. Here, let F be the magnitude of the frictional force acting at the point of contact between the sphere and semi-cylinder.

(4) Find the relation between $\frac{d\theta}{dt}$ and ω. Furthermore, find the magnitude of the frictional force F.

(5) Show that the motion of the sphere is a simple harmonic oscillation when θ is small. Furthermore, find the period T of the oscillation.

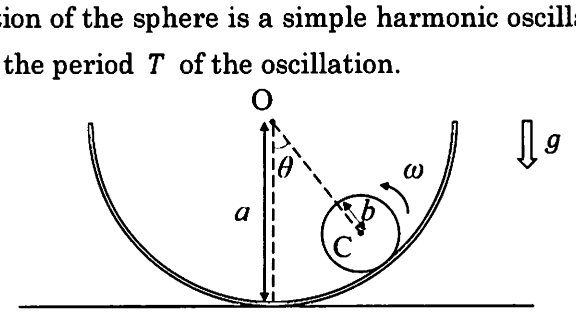

Fig. 5

2023 年 8 月実施
問題６　数学基礎
（１頁目／１頁中）

4 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ の 4 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) これらのベクトルからなる集合が $\boldsymbol{R}^4$ の基底であることを示せ．

(2) これらのベクトルのうち，互いに直交しているベクトルの組をひとつ求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ．

(4) $\boldsymbol{R}^4$ の正規直交基底をひとつ求めよ．ここで，求める正規直交基底の 4 つの基底ベクトルのうち 2 つの向きは，それぞれ問(2)で求めた 2 つのベクトルの向きと同じとする．

Consider the following four vectors of the four-dimensional real vector space $\boldsymbol{R}^4$:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that the set of these vectors is a basis of $\boldsymbol{R}^4$.

(2) From these vectors, find a pair of vectors that are mutually orthogonal.

(3) Find the angle between $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$.

(4) Find an orthonormal basis of $\boldsymbol{R}^4$. Here, the orientations of two of the four basis vectors of the desired orthonormal basis are equal to those of the two vectors found in question (2).