

---

---

2023年3月1日 9:40-10:40

大学院工学研究科	電気エネルギーシステム専攻 通信工学専攻 電子工学専攻
大学院情報科学研究科	情報・生命系群
大学院医工学研究科	工学系コース電気・情報系

## 大学院入学試験問題

### 専門科目

## Specialized Subjects

**注意：** 6設問中，2問題を選んで，答案用紙（問題ごとに1枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い．問題は和文と英文を併記してある．

**Attention:** Choose 2 questions out of the following 6 questions and answer each of them on a separate answer sheet. You may use the backside. Questions are written in both Japanese and English.

2023年2・3月実施  
問題1 電気工学  
(1頁目/2頁中)

- (1) Fig. 1 に示すフィードバック制御系を考える。ここで、 $R(s)$ は目標値、 $C(s)$ は制御量である。また、 $K_P$ と $K_I$ は定数である。
- (a)  $K_P > 0$ ,  $K_I > 0$ とする。この制御系の開ループ伝達関数  $G(s)$  を求めよ。
  - (b)  $K_P = 0$ ,  $K_I > 0$ とする。開ループ周波数伝達関数  $G(j\omega)$  のナイキスト線図の概形を描け。
  - (c) 問(1)(b)のとき、この制御系が安定となるような  $K_I$  の範囲を求めよ。また、ゲイン余裕  $GM$  [dB] を  $K_I$  で表せ。
  - (d)  $K_P > 0$ ,  $K_I = 6K_P$ とする。この制御系が安定で、かつ定常速度偏差が0.1未満となる  $K_P$  の範囲を求めよ。
- (2) 容量が 10 kVA、定格一次/二次電圧が 1000 V/200 V である単相変圧器がある。定格出力時の銅損は 450 W、鉄損は 72 W である。
- (a) 定格一次電流  $I_{1n}$  [A] と定格二次電流  $I_{2n}$  [A] を求めよ。
  - (b) この変圧器の二次側に負荷を接続した。変圧器を定格電圧で動作させたところ、出力は 4.8 kW となり、負荷電流は 30 A であった。この負荷の力率  $\cos\theta$  を求めよ。
  - (c) 問(2)(b)のときの銅損  $P_c$  [W] を求めよ。
  - (d) 変圧器を定格電圧で動作させたときの最大効率  $\eta_m$  [%] と、 $\eta_m$ のときの負荷電流  $I_m$  [A] を求めよ。ただし、負荷の力率  $\cos\theta$  を 1.0 とする。

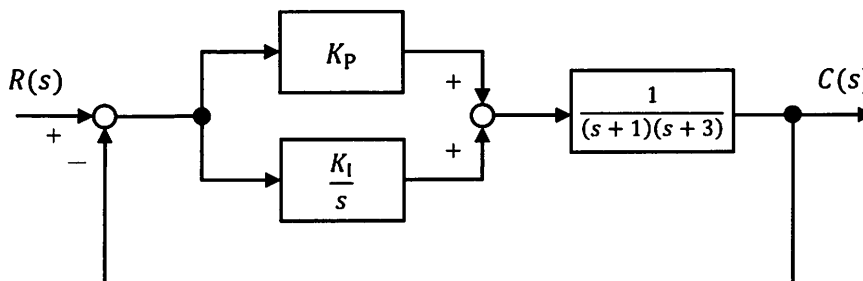


Fig. 1

2023 年 2・3 月実施  
問題 1 電気工学  
(2 頁目 / 2 頁中)

- (1) Consider the feedback control system shown in Fig. 1, where  $R(s)$  and  $C(s)$  denote a reference input and a controlled variable, respectively.  $K_P$  and  $K_I$  are constants.
- (a) Let  $K_P > 0$  and  $K_I > 0$ . Find the open-loop transfer function  $G(s)$  of the control system.
- (b) Let  $K_P = 0$  and  $K_I > 0$ . Sketch the Nyquist diagram of the open-loop frequency transfer function  $G(j\omega)$ .
- (c) In question (1)(b), find the range of values of  $K_I$  so that the control system is stable. And express the gain margin  $GM$  [dB] in terms of  $K_I$ .
- (d) Let  $K_P > 0$  and  $K_I = 6K_P$ . Find the range of values of  $K_P$  so that the control system is stable and the steady-state velocity error is less than 0.1.
- (2) There is a single-phase transformer with a capacity of 10 kVA and a rated primary/secondary voltage of 1000 V/200 V. The copper loss is 450 W and the iron loss is 72 W at the rated output power.
- (a) Find the rated primary current  $I_{1n}$  [A] and the rated secondary current  $I_{2n}$  [A].
- (b) A load is connected to the secondary side of the transformer. When the transformer is operated at the rated voltage, the output power and the load current are 4.8 kW and 30 A, respectively. Find the power factor  $\cos\theta$  of the load.
- (c) In question (2)(b), find the copper loss  $P_c$  [W].
- (d) When the transformer is operated at the rated voltage, find the maximum efficiency  $\eta_m$  [%] and the load current  $I_m$  [A] at  $\eta_m$ . Here, the power factor  $\cos\theta$  of the load is 1.0.

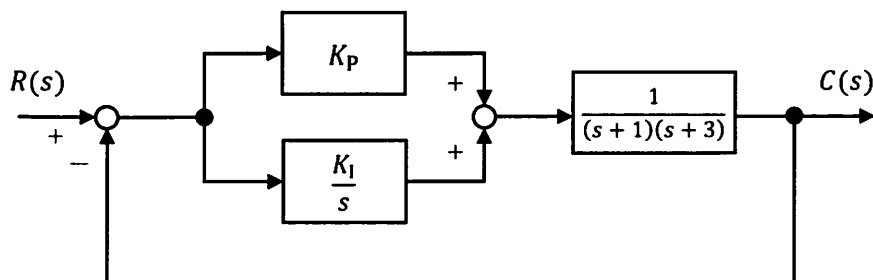


Fig. 1

2023年2・3月実施  
問題2 通信工学  
(1頁目/2頁中)

1ビットの情報を周波数  $f_c$  [Hz]の搬送波で変調して、送信時間  $T$  [s]で伝送することを考える ( $f_c \gg 1/T$ )。送信する情報  $b \in \{0,1\}$  から、変調信号  $m(t)$ を次のように生成する。

$$m(t) = \begin{cases} 2b - 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$m(t)$  を変調した被変調信号  $s(t)$  は次のように表される。

$$s(t) = A m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

ただし、 $A$  は振幅である。次の問に答えよ。

(1)  $b = 1$  のときの  $s(t)$  を  $s_1(t)$  とし、 $s_1(t)$  の周波数スペクトルを  $S_1(f)$  とする。

(a)  $S_1(f)$  を求めよ。

(b)  $|S_1(f)|$  の概形を図示せよ。

(2) 送信者は  $s(t)$  を送信し、雑音のある通信路を通った信号を受信者が受信した。受信信号  $y(t)$  を

$$y(t) = s(t) + n(t)$$

とする。ここで、 $n(t)$  は両側電力スペクトル密度  $N/2$  の白色雑音とする。 $y(t)$  を復調するときには、まず帯域幅  $2B$  を使い、 $y(t)$  に通過帯域  $[f_c - B, f_c + B]$  および  $[-f_c - B, -f_c + B]$  の帯域通過フィルタを適用した信号  $z(t)$  を求める。ただし、 $1/T \ll B \ll f_c$  と仮定する。

次の問に答えよ。ただし、帯域通過フィルタは理想帯域通過フィルタであり、また  $B$  は十分大きく、帯域通過フィルタによって  $s(t)$  の信号電力が失われないと仮定できるものとする。

(a) 信号電力  $P_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt$  を求めよ。

(b)  $z(t)$  に含まれる雑音の電力  $P_n$  を求めよ。

(c)  $z(t)$  の信号対雑音電力比を求めよ。

(d) 復調信号を得るためには、上記の処理に加えて、さらに処理を行う必要がある。 $z(t)$  から復調信号を得るための手順を説明せよ。

2023年2・3月実施  
問題2 通信工学  
(2頁目/2頁中)

Consider sending one-bit of information in a sending period  $T$  [s] using modulation of the carrier with frequency  $f_c$  [Hz] ( $f_c \gg 1/T$ ). We generate the modulating signal  $m(t)$  from the sending information  $b \in \{0,1\}$  as follows.

$$m(t) = \begin{cases} 2b - 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The modulated signal  $s(t)$  is expressed as follows.

$$s(t) = A m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Here,  $A$  is the amplitude. Answer the following questions.

(1) Let  $s_1(t)$  be  $s(t)$  when  $b = 1$ , and  $S_1(f)$  be the spectrum of  $s_1(t)$ .

- (a) Derive  $S_1(f)$ .
- (b) Sketch the outline of  $|S_1(f)|$ .

(2) The sender sends  $s(t)$ , and the receiver receives the signal through a noisy channel. Let the received signal  $y(t)$  be

$$y(t) = s(t) + n(t),$$

where  $n(t)$  is a white noise with a double-sided power spectrum density of  $N/2$ . When demodulating  $y(t)$ , we first use a bandwidth  $2B$ , and obtain a signal  $z(t)$  by applying a band-pass filter with the passing band  $[f_c - B, f_c + B]$  and  $[-f_c - B, -f_c + B]$  to  $y(t)$ . Here, we assume  $1/T \ll B \ll f_c$ .

Answer the following questions. Assume that we can approximate the band-pass filter as an ideal band-pass filter, and  $B$  is sufficiently large so that  $s(t)$  does not lose any signal power by the band-pass filter.

- (a) Derive the signal power  $P_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt$ .
- (b) Derive the power of the noise  $P_n$  included in  $z(t)$ .
- (c) Derive the signal-to-noise power ratio of  $z(t)$ .
- (d) We need to apply an additional process in addition to the process explained above to obtain the demodulated signal. Explain the process to obtain the demodulated signal from  $z(t)$ .

2023年2・3月実施  
問題3 電子工学  
(1頁目/2頁中)

Fig. 3(a)に示す n チャネル金属酸化膜半導体電界効果型トランジスタ (MOSFET)  $M_1$ ,  $M_2$  のカスコード接続を用いた増幅回路について、以下の問に答えよ。なお、 $V_{DD}$ ,  $V_B$  はそれぞれ電源電圧、バイアス電圧である。

- (1) 飽和領域で動作中の n チャネル MOSFET について、チャネル、ピンチオフ点、空乏層を含んだ断面構造図を描き、ドレイン電圧の増加に対してドレインソース間電流が飽和する理由を説明せよ。
- (2) Fig. 3(a)に示すカスコード接続を用いた増幅回路の特長を1つ述べよ。
- (3) Fig. 3(a)に示す増幅回路の微小信号等価回路を考える。
  - (a) 微小信号等価回路を描け。ただし、 $M_1$ ,  $M_2$  の微小信号モデルには、Fig. 3(b)に示すモデルを用いよ。
  - (b)  $R_L = \infty$ ,  $v_i = 0$  とする。増幅回路の出力抵抗を  $g_m$ ,  $r_D$  を用いて表せ。また、導出結果から、 $M_2$  がなく点 A と点 B とが短絡している場合と比べて出力抵抗がどう変化するか答えよ。
  - (c) Fig. 3(a)に示す増幅回路の電圧利得  $K_V = v_o/v_i$  を  $g_m$ ,  $r_D$ ,  $R_L$  を用いて表せ。ただし、 $R_L \neq \infty$ ,  $v_i \neq 0$ ,  $1 \ll g_m r_D$  とする。
- (4)  $M_1$ ,  $M_2$  が飽和領域で動作できる  $v_o$  の下限値を  $V_B$ ,  $V_{th}$ ,  $v_i$  を用いて求めよ。なお、 $V_{th}$  は  $M_1$ ,  $M_2$  のしきい値電圧を表す。必要に応じて計算の過程で  $v_x$  を用いても良い。

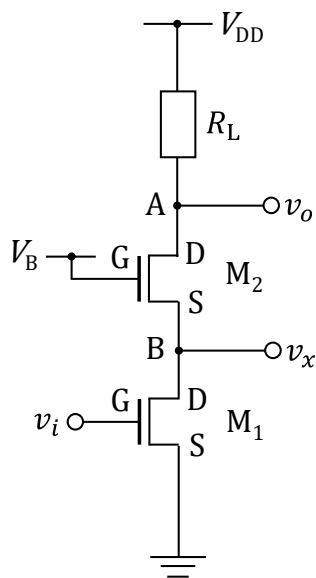


Fig. 3(a)

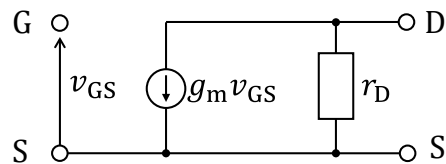


Fig. 3(b)

2023年2・3月実施  
問題3 電子工学  
(2頁目/2頁中)

Answer the following questions on an amplifier circuit using n-channel metal-oxide-semiconductor field-effect transistors (MOSFETs)  $M_1$  and  $M_2$  with cascode connection shown in Fig. 3(a). Here,  $V_{DD}$  and  $V_B$  are supply voltage and bias voltage, respectively.

- (1) Draw the cross sectional structure of an n-channel MOSFET under saturation region with channel, pinch-off point and depletion layer, and explain the reason why the drain-source current saturates against an increase of the drain voltage.
- (2) State a merit of the amplifier circuit with cascode connection shown in Fig. 3(a).
- (3) Consider the small-signal equivalent circuit for the amplifier circuit shown in Fig. 3(a).
  - (a) Draw the small-signal equivalent circuit. Here, for the small-signal model of  $M_1$  and  $M_2$ , use the model shown in Fig. 3(b).
  - (b) Suppose  $R_L = \infty$  and  $v_i = 0$ . Express the output resistance of the amplifier circuit using  $g_m$  and  $r_D$ . Also, from the derived result, answer how the output resistance changes compared to when points A and B are shorted without  $M_2$ .
  - (c) Express the voltage gain  $K_V = v_o/v_i$  of the amplifier circuit shown in Fig. 3(a) using  $g_m$ ,  $r_D$  and  $R_L$ . Here, suppose  $R_L \neq \infty$ ,  $v_i \neq 0$  and  $1 \ll g_m r_D$ .
- (4) Derive an expression for the lower limit of  $v_o$  for  $M_1$  and  $M_2$  to be working under the saturation region using  $V_B$ ,  $V_{th}$  and  $v_i$ . Here,  $V_{th}$  is the threshold voltage of  $M_1$  and  $M_2$ . May use  $v_x$  for the calculation process if necessary.

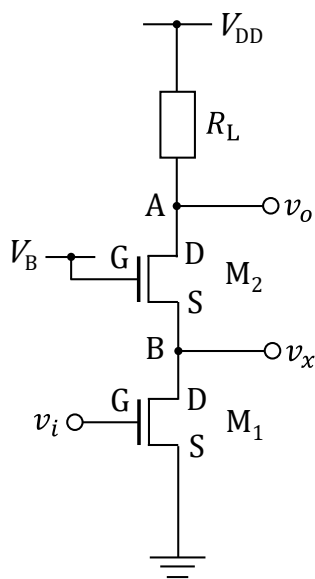


Fig. 3(a)

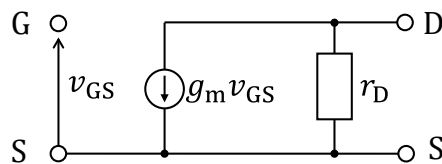


Fig. 3(b)

2023年2・3月実施  
問題4 計算機1  
(1頁目/2頁中)

クロックに同期して、各時刻 $t=1, 2, \dots$ に到来する2つの3ビット2進非負整数 $X(t) = (x_2(t), x_1(t), x_0(t))_2$ ,  $Y(t) = (y_2(t), y_1(t), y_0(t))_2$ に対して、3ビット2進非負整数 $Z(t) = (z_2(t), z_1(t), z_0(t))_2$ と1ビット信号 $F(t)$ を出力する順序回路を考える。本順序回路の出力は

$$Z(t) = F(t-1) + \sum_{i=0}^2 |x_i(t) - y_i(t)|,$$

$$F(t) = \left( \sum_{i=0}^2 z_i(t) \right) \bmod 2$$

であり、 $F(0) = 0$ とする。ただし、整数 $p, q, r$ に対して、 $|p|$ は $p$ の絶対値を表し、 $q \bmod r$ は $q$ を $r$ で割った余りを表すものとする。以下の間に答えよ。

- Fig. 4(a)は本順序回路の各時刻における入出力の値を表したものである。Fig. 4(a)の $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ の値を答えよ。ただし、 $(X(t))_{10}$ ,  $(Y(t))_{10}$ ,  $(Z(t))_{10}$ はそれぞれ $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ の10進数表記である。
- Dフリップフロップ、全加算器、および出来るだけ少ない数の論理ゲートを用いて、本順序回路の構成を示すブロック図を描け。全加算器はFig. 4(b)のブロック図を用いるものとし、 $a, b$ は入力ビット、 $c_i$ は下位ビットからの桁上げ入力、 $s$ は和、 $c_o$ は桁上げ出力を表す。
- Fig. 4(b)に示す全加算器の $s, c_o$ をそれぞれ最簡積和形の論理式で示せ。ただし、論理積(AND)、論理和(OR)、論理否定(NOT)の各論理素子は、それぞれ $\wedge, \vee, \bar{\quad}$ の記号を用いるものとする。

$t$	$(X(t))_{10}$	$(Y(t))_{10}$	$(Z(t))_{10}$	$F(t)$
1	3	2	$\alpha_1$	$\alpha_6$
2	2	4	$\alpha_2$	$\alpha_7$
3	1	7	$\alpha_3$	$\alpha_8$
4	0	1	$\alpha_4$	$\alpha_9$
5	5	2	$\alpha_5$	$\alpha_{10}$

Fig. 4(a)

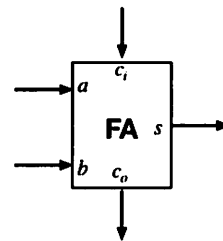


Fig. 4(b)



**2023 年 2・3 月実施  
問題 4 計算機 1  
(2 頁目 / 2 頁中)**

Consider a sequential circuit that receives two 3-bit non-negative integers  $X(t) = (x_2(t), x_1(t), x_0(t))_2$  and  $Y(t) = (y_2(t), y_1(t), y_0(t))_2$  at each time ( $t=1, 2, \dots$ ) in synchronization with a clock signal, and outputs a 3-bit non-negative integer  $Z(t) = (z_2(t), z_1(t), z_0(t))_2$  and a 1-bit signal  $F(t)$ . The outputs of the sequential circuit are

$$Z(t) = F(t-1) + \sum_{i=0}^2 |x_i(t) - y_i(t)|,$$

$$F(t) = \left( \sum_{i=0}^2 z_i(t) \right) \bmod 2,$$

with a condition of  $F(0) = 0$ . For integers  $p, q, r$ ,  $|p|$  denotes the absolute value of  $p$  and " $q \bmod r$ " denotes the remainder of  $q$  divided by  $r$ . Answer the following questions.

- (1) Fig. 4(a) shows input and output values of the sequential circuit at each time. Write down the values  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$  of Fig. 4(a). Note that  $(X(t))_{10}$ ,  $(Y(t))_{10}$ , and  $(Z(t))_{10}$  denote the decimal notations of  $X(t)$ ,  $Y(t)$ , and  $Z(t)$ , respectively.
- (2) Draw a block diagram representing the sequential circuit using D flip-flops, full adders and as few logic gates as possible. Use the block diagram of Fig. 4(b) for the full adder, where  $a$  and  $b$  are the input bits,  $c_i$  is the input carry from the lower bit,  $s$  is the sum, and  $c_o$  is the output carry.
- (3) Show logical formulas for  $s$  and  $c_o$  of the full adder shown in Fig. 4(b) in the minimum sum-of-product form. Note that operations of logical conjunction (AND), disjunction (OR), and negation (NOT) should be represented by  $\wedge$ ,  $\vee$ , and  $\bar{\quad}$ , respectively.

$t$	$(X(t))_{10}$	$(Y(t))_{10}$	$(Z(t))_{10}$	$F(t)$
1	3	2	$\alpha_1$	$\alpha_6$
2	2	4	$\alpha_2$	$\alpha_7$
3	1	7	$\alpha_3$	$\alpha_8$
4	0	1	$\alpha_4$	$\alpha_9$
5	5	2	$\alpha_5$	$\alpha_{10}$

Fig. 4(a)

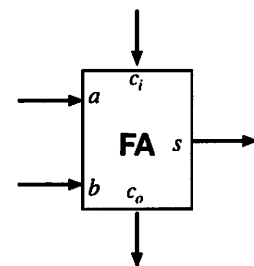


Fig. 4(b)

2023年2・3月実施  
問題5 計算機2  
(1頁目/2頁中)

以下の間に答えよ。

- (1) BNF 記法による次の2つの文法  $G_1, G_2$  を考える。

文法 $G_1$	文法 $G_2$
$S ::= aS \mid ab \mid ba \mid ccc$	$S ::= TbU$
	$T ::= TT \mid a$
	$U ::= aU \mid a$

ただし,  $S, T, U$  は非終端記号とし,  $a, b, c$  は終端記号とし,  $S$  を開始記号とする.  $G_1$  と  $G_2$  が表現する言語をそれぞれ  $L_1$  と  $L_2$  とする. 次の各命題の真偽を判定し, その理由を述べよ.

- (a)  $G_1$  は曖昧である.
- (b)  $L_2$  を表現する BNF 記法によるどの文法も3個以上の非終端記号を持つ.
- (c)  $L_1$  と  $L_2$  の共通集合は空集合である.
- (2) 自然数に対して3つの演算子  $+, *, \nabla$  を考え, 後置記法(逆ポーランド記法)で表現した計算可能な式を以下では「計算式」と呼ぶ. ただし,  $+$  は加算の2項演算子とし,  $*$  は乗算の2項演算子とし,  $\nabla$  は3つの被演算子の最小値を結果とするような3項演算子とする. スタックを用いて計算式を評価する. 例えば, 計算式  $827\nabla$  をスタックを用いて評価すると,  $8, 2, 7$  がこの順序でスタックに積まれ, 3つの被演算子がスタックから取り出され3項演算子  $\nabla$  が適用され, その結果の  $2$  がスタックに積まれる.
- (a) 計算式  $312+*94\nabla5+$  をスタックを用いて評価せよ. 各ステップにおけるスタックの中身を示せ.
- (b) 計算式の長さを, その計算式中の被演算子の個数と演算子の個数の合計と定義する. 計算式に必要なスタックの深さを, その計算式の評価中にスタックに存在する被演算子の最大個数と定義する. 例えば, 計算式  $827\nabla$  の長さは4であり, 必要なスタックの深さは3である.  $n$  を  $n \geq 3$  なる任意の整数とする.
- (i) 長さ  $n$  の計算式のうち, 必要なスタックの深さが最小となるようなものを1つ示せ.
- (ii) 長さ  $n$  の計算式のうち, 必要なスタックの深さが最大となるようなものを1つ示せ.

2023年2・3月実施  
問題5 計算機2  
(2頁目 / 2頁中)

Answer the following questions.

- (1) Consider the following two grammars  $G_1, G_2$  in BNF:

grammar $G_1$	grammar $G_2$
$S ::= aS \mid ab \mid ba \mid ccc$	$S ::= TbU$
	$T ::= TT \mid a$
	$U ::= aU \mid a$

where  $S, T, U$  are nonterminal symbols,  $a, b, c$  are terminal symbols, and  $S$  is the start symbol. Let  $L_1$  and  $L_2$  be the languages described by  $G_1$  and  $G_2$ , respectively. For each of the following statements, determine whether the statement is true or false, and explain the reason.

- (a)  $G_1$  is ambiguous.
- (b) Every grammar in BNF which describes  $L_2$  has at least three nonterminal symbols.
- (c) The intersection of  $L_1$  and  $L_2$  is the empty set.
- (2) Considering three operators  $+, *, \nabla$  for natural numbers, we call a computable expression in postfix notation (reverse Polish notation) an “arithmetic expression” hereinafter. Here,  $+$  represents the binary operator for addition,  $*$  represents the binary operator for multiplication, and  $\nabla$  represents the ternary operator whose result is the minimum value among three operands. We evaluate an arithmetic expression using a stack. For example, we evaluate the arithmetic expression  $8\ 2\ 7\ \nabla$  using a stack as follows: push 8, 2, 7 on the stack in this order, pop the three operands from the stack, perform the operation  $\nabla$  on them, and push the result, 2, on the stack.
- (a) Evaluate the arithmetic expression  $3\ 1\ 2\ +\ *9\ 4\ \nabla\ 5\ +$  using a stack. Show the contents of the stack at every step.
- (b) We define the length of an arithmetic expression as the total of the number of operands and the number of operators. We define the required stack depth of an arithmetic expression as the maximum number of operands that exist in the stack during the evaluation of the arithmetic expression. For example, the length of the arithmetic expression  $8\ 2\ 7\ \nabla$  is 4, and its required stack depth is 3. Let  $n$  be an arbitrary integer such that  $n \geq 3$ .
- (i) Show an arithmetic expression whose required stack depth is minimum among all the arithmetic expressions of length  $n$ .
- (ii) Show an arithmetic expression whose required stack depth is maximum among all the arithmetic expressions of length  $n$ .

2023年2・3月実施  
問題6 物理専門  
(1頁目/2頁中)

以下の1次元ポテンシャル  $V(x)$  中の質量  $m$  の粒子を考える.

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

ここで,  $\omega$  は正の定数である. また,  $\hat{x} = x$ ,  $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$  を位置と運動量の演算子,  $\hat{a} =$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$
 ( $h$ はプランク定数),  $i$ を虚数単位とする. 以

下の問に答えよ.

(1) この粒子に対するハミルトニアン  $\hat{H}$  を  $\hat{x}$  と  $\hat{p}$  を用いて記せ.

(2)  $\hat{H}$  を  $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  を用いて表せ.

(3)  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を  $\hat{H}$  の規格化された固有ベクトルとする. このとき,

$$\hat{a}|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{n}|n-1\rangle & (n \geq 1) \\ 0 & (n = 0) \end{cases},$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

が成立する. これらの式を利用して  $\hat{H}$  の固有値が  $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$  であることを示せ.

(4) 時刻  $t = 0$  における状態ベクトル  $|\varphi(0)\rangle$  を, 問(3) の  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1$ ) を用いて

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

とする.

(a) 時刻  $t$  における状態ベクトル  $|\varphi(t)\rangle$  を求めよ.

(b) 時刻  $t$  における粒子の位置の期待値  $\langle x \rangle$  を求めよ.

Question No. 6: Advanced Physics (2/2)

2023 年 2・3 月実施  
問題 6 物理専門  
(2 頁目 / 2 頁中)

Consider a particle of mass  $m$  in the following one-dimensional potential  $V(x)$ .

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Here,  $\omega$  is a positive constant. Also,  $\hat{x} = x$ ,  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  are the position and the momentum operators,  $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$ ,  $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$ ,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h$ : Planck's constant), and  $i$  is the imaginary unit. Answer the following questions.

(1) Write down the Hamiltonian  $\hat{H}$  of this particle in terms of  $\hat{x}$  and  $\hat{p}$ .

(2) Express  $\hat{H}$  in terms of  $\hat{a}$  and  $\hat{a}^\dagger$ .

(3) Let  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) be the normalized eigenvectors of  $\hat{H}$ . Then,

$$\hat{a}|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{n}|n-1\rangle & (n \geq 1) \\ 0 & (n = 0) \end{cases},$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

are satisfied. By using these equations, show that the eigenvalues of  $\hat{H}$  are  $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ .

(4) Let the state vector  $|\varphi(0)\rangle$  at time  $t = 0$  be

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

with  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1$ ) in question (3).

(a) Obtain the state vector  $|\varphi(t)\rangle$  at time  $t$ .

(b) Obtain the expectation value of the particle position  $\langle x \rangle$  at time  $t$ .