

**2018年3月実施
問題1 電気工学
(1頁目/3頁中)**

- (1) Fig. 1(a) は直流電動機であり, $v_a(t)$ は電機子電圧, $i_a(t)$ は電機子電流, R_a は電機子巻線の抵抗, L_a は電機子巻線のインダクタンス, $\theta(t)$ は回転角である. 直流電動機の世界起電力 $e_v(t)$ は次式で与えられる.

$$e_v(t) = K_V \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (1A)$$

ここで, K_V は速度起電力定数である. また, 直流電動機の機械系に関する方程式は次式で与えられる.

$$K_T i_a(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + D \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (1B)$$

ここで, K_T はトルク定数, J は負荷も含めた電動機の慣性モーメント, D は電動機の粘性抵抗である. 次の問に答えよ.

- (a) Fig. 1(a) に示す電気回路に関する回路方程式を示せ.
- (b) (a)で導出した回路方程式のラプラス変換を求めよ. 同様に, 式(1B)のラプラス変換を求めよ. ただし, 電機子電圧 $v_a(t)$, 電機子電流 $i_a(t)$, 回転角 $\theta(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $V_a(s)$, $I_a(s)$, $\Theta(s)$ とする. また, 電機子電流および回転角の初期値をそれぞれ $i_a(0)$ および $\theta(0)$ とする.
- (c) 伝達関数 $G(s) = \Theta(s) / V_a(s)$ を求めよ.
- (d) 伝達関数 $G(s)$ の単位インパルス応答 $g(t)$ を求めよ. ただし, $R_a = 1$, $L_a = 1$, $J = 1$, $D = 4$, $K_V = 2$, $K_T = 1$ とする.
- (2) Fig. 1(b) のような制御系がある. 同図において, $R(s)$, $E(s)$, $C(s)$, $D(s)$ は目標値 $r(t)$, 偏差 $e(t)$, 制御量 $c(t)$, 外乱 $d(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである. また, K は正の定数である. 次の問に答えよ.
- (a) $R(s)$, $D(s)$, K , s を使って $E(s)$ を表わせ.
- (b) 定常位置偏差 e_p を求めよ. ただし, $r(t) = 1$, $d(t) = 0.2$, $K = 1$ とする.
- (c) 偏差 $e(t)$ に含まれる周期的な振動成分 $p(t)$ を求めよ. ただし, $r(t) = 0$, $d(t) = \sin t$, $K = 1$ とする.
- (d) 目標値 $r(t) = 0$, 外乱 $d(t) = \sin t$ とする. 周期的な振動成分の大きさが(2)(c)で求めた $p(t)$ の大きさの $1/2$ となる K に関する条件を求めよ.

2018年3月実施
問題1 電気工学
(2頁目/3頁中)

- (1) Consider the direct-current motor shown in Fig. 1(a), where $v_a(t)$ is the armature voltage, $i_a(t)$ is the armature current, R_a is the armature resistance, L_a is the armature inductance, and $\theta(t)$ is the rotor angle. The speed electro-motive force of the direct-current motor $e_v(t)$ is given by

$$e_v(t) = K_V \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (1A)$$

where K_V is the speed electro-motive force coefficient. The mechanical equation of the direct current motor is given by

$$K_T i_a(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + D \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (1B)$$

where K_T is the torque coefficient, J is the inertia moment of the motor including load, and D is the viscous resistance. Answer the following questions.

- (a) Derive the circuit equation associated with the electric circuit shown in Fig. 1(a).
- (b) Express the Laplace transformation of the electric circuit equation derived in question (a). In the same way, express the Laplace transformation of equation (1B). Let $V_a(s)$, $I_a(s)$, and $\Theta(s)$ denote Laplace transformations of the armature voltage $v_a(t)$, armature current $i_a(t)$ and rotor angle $\theta(t)$, respectively. Let $i_a(0)$ and $\theta(0)$ denote the initial values of armature current and rotor angle, respectively.
- (c) Find the transfer function $G(s) = \Theta(s) / V_a(s)$.
- (d) Find the unit impulse response $g(t)$ of the transfer function $G(s)$. Let $R_a = 1$, $L_a = 1$, $J = 1$, $D = 4$, $K_V = 2$, and $K_T = 1$.
- (2) Consider the control system shown in Fig. 1(b), where $R(s)$, $E(s)$, $C(s)$ and $D(s)$ denote the Laplace transformations of reference input $r(t)$, error $e(t)$, controlled variable $c(t)$, and disturbance $d(t)$, respectively. K is a positive constant. Answer the following questions.
- (a) Express $E(s)$ in terms of $R(s)$, $D(s)$, K , and s .
- (b) Find the steady-state position error ε_p . Let $r(t) = 1$, $d(t) = 0.2$, and $K = 1$.
- (c) Find the periodic oscillation $p(t)$ included in the error $e(t)$. Let $r(t) = 0$, $d(t) = \sin t$, and $K = 1$.
- (d) Let reference input $r(t) = 0$ and disturbance $d(t) = \sin t$. Find the condition with respect to K so that the magnitude of periodic oscillation is equal to half the magnitude of $p(t)$ found in question (2)(c).

2018年3月実施
問題1 電気工学
(3頁目/3頁中)

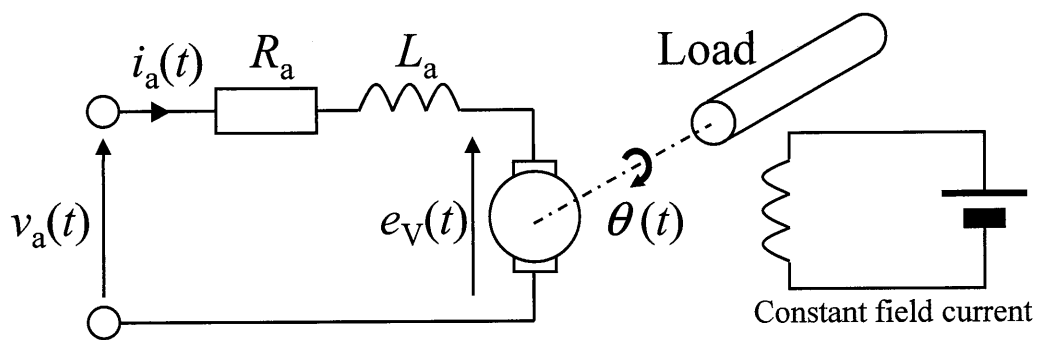


Fig. 1(a)

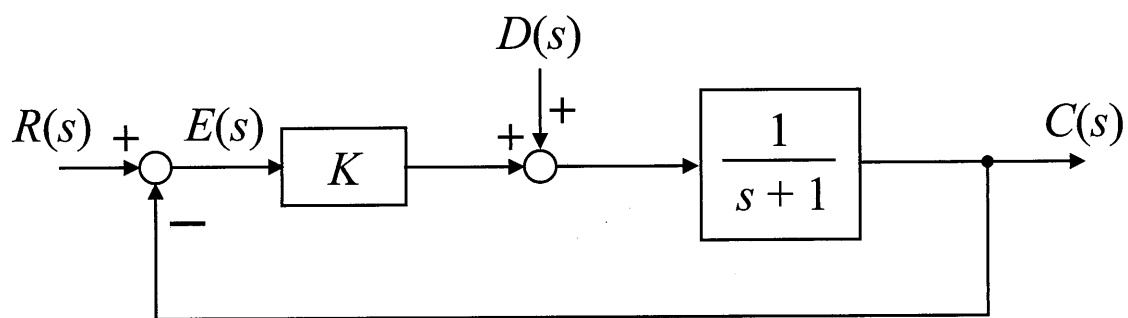


Fig. 1(b)

**2018年3月実施
問題2 通信工学
(1頁目/3頁中)**

Fig. 2に示す送信器を考える。送信信号として、 $[-f_m, f_m]$ に帯域制限された信号 $g(t)$ を考える。また $0 < f_m \ll f_c$ とする。ここで f_c は搬送波周波数である。以下の問に答えよ。

- (1) 信号 $g(t)$ が次の周期 T のインパルス系列 $p_s(t)$ を用いて標本化される。

$$g_s(t) = g(t)p_s(t)$$

$$p_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

ここで、 $g_s(t)$ は標本化された信号、 $\delta(t)$ は単位インパルス関数である。

- (a) $p_s(t)$ のフーリエ変換を $P_s(f)$ とする。以下の式が成り立つことを示せ。

$$P_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

- (b) $g(t)$, $g_s(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $G(f)$, $G_s(f)$ とする。以下の式が成り立つことを示せ。

$$G_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

必要に応じて以下の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a)f(x)dx = f(a)$$

ここで、 $f(x)$ は実関数、 a は実数である。

- (c) 標本化された信号 $g_s(t)$ から元の信号 $g(t)$ を復元するために必要な標本周期 T の条件を示せ。

- (2) 標本化された $g_s(t)$ を量子化及び符号化することでバイナリ系列 $\{a_n\}$ (n は整数)を得る。両側波帯(DSB)変調器に入力される信号 $u_m(t)$ は、以下の式で表される。

$$u_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n u(t - nT_b)$$

ここで、 b_n は a_n の値によって定まる係数で、 T_b は1ビットあたりのパルス幅で、 $u(t)$ は以下の式で与えられる単位パルス信号である。

2018年3月実施
問題2 通信工学
(2頁目/3頁中)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_b \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

送信器出力を位相シフトキーイングとする場合, b_n を以下のように定める.

$$b_n = \begin{cases} -A, & a_n = 0 \text{ のとき} \\ A, & a_n = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

このときバイナリ系列 $\{a_n\}$ を(0,1)の無限繰り返し系列 $(\dots, 0, 1, 0, 1, \dots)$ とした場合, DSB変調器入力信号 $u_m(t)$ のフーリエ級数を求めよ. ただし $a_0 = 0$ である.

Consider a transmitter shown by Fig. 2 for a transmitting signal $g(t)$ that is limited to $[-f_m, f_m]$. Note that $0 < f_m \ll f_c$ and f_c denotes a carrier frequency. Answer the following questions.

(1) The signal $g(t)$ is sampled by the following periodic impulse sequence $p_s(t)$.

$$g_s(t) = g(t)p_s(t),$$

$$p_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT),$$

where $g_s(t)$ is the sampled signal and $\delta(x)$ is a unit impulse function.

(a) Let $P_s(f)$ be the Fourier transform of $p_s(t)$. Show that

$$P_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

(b) Let $G(f)$ and $G_s(f)$ be the Fourier transforms of $g(t)$ and $g_s(t)$, respectively. Show that

$$G_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

Use the following formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a)f(x)dx = f(a),$$

if necessary. Here $f(x)$ is a real function and a is a real number.

2018年3月実施
問題2 通信工学
(3頁目/3頁中)

(c) Derive the condition on the sample period T to recover the original signal $g(t)$ from the sampled signal $g_s(t)$.

(2) Consider a binary data sequence $\{a_n\}$ (where n is an integer) that is obtained by quantizing and encoding the sampled signal $g_s(t)$. A modulating signal $u_m(t)$ inputted into the double side-band (DSB) modulator is given by the following equation.

$$u_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n u(t - nT_b),$$

where the coefficient b_n is determined by the value of a_n , T_b is the pulse width per bit, and $u(t)$ is a unit pulse signal given by the following equation.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{when } 0 \leq t \leq T_b, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

When the transmitter output is given by a phase shift keying signal, the coefficient b_n is determined as follows.

$$b_n = \begin{cases} -A, & \text{when } a_n = 0, \\ A, & \text{when } a_n = 1. \end{cases}$$

Assuming that the binary sequence $\{a_n\}$ is a periodic infinite sequence $(\dots, 0, 1, 0, 1, \dots)$ consisting of (0,1), derive the Fourier series of the modulating signal $u_m(t)$. Here $a_0 = 0$.

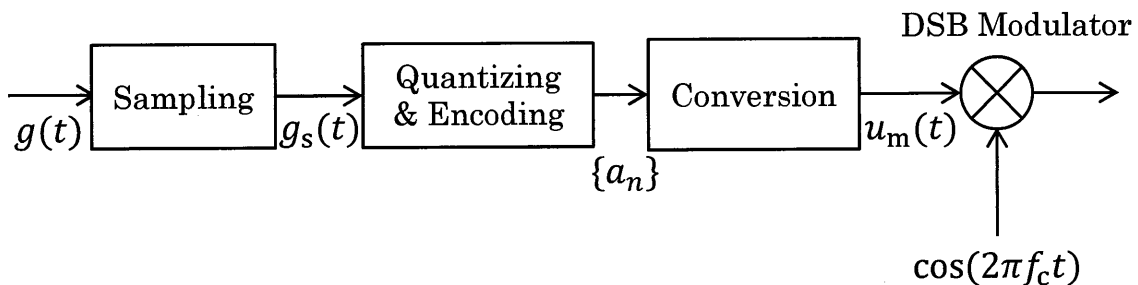


Fig. 2

2018年3月実施
問題3 電子工学
(1頁目/3頁中)

nチャンネルMOS電界効果トランジスタを用いた増幅回路について、以下の間に答えよ。ただし、トランジスタの簡略化したモデルとしてFig.3(a)を用いること。ここで、 g_m 、 r_D 、 v_{GS} は、それぞれトランジスタの相互コンダクタンス、ドレーン抵抗、ゲート・ソース間電圧である。

(1) Fig. 3(b) に示される増幅回路について考える。

(a) 微小信号等価回路を示せ。

(b) 電圧利得 K_V を g_m 、 r_D 、 R_L 、 R_S 、 C_S を用いて示せ。

(2) Fig. 3(c) に示す増幅回路について考える。ただし、 TR_1 と TR_2 の相互コンダクタンスの値はいずれも g_m であり、それらのドレーン抵抗の値はいずれも r_D である。 TR_1 と TR_2 のゲート・ソース間電圧は、それぞれ v_{GS1} 、 v_{GS2} である。

(a) 微小信号等価回路を示せ。

(b) 電圧利得 K_V を g_m と r_D を用いて示せ。

(3) Fig. 3(d) に示す差動増幅回路について考える。ただし、 TR_1 と TR_2 の相互コンダクタンスの値はいずれも g_m であり、それらのドレーン抵抗の値はいずれも r_D である。 TR_1 と TR_2 のゲート・ソース間電圧は、それぞれ v_{GS1} 、 v_{GS2} である。

(a) 微小信号等価回路を示せ。

(b) 差動利得 K_d を g_m 、 r_D 、 R_L 、 R_S のうち必要なものを用いて示せ。

(c) 同相利得 K_c を g_m 、 r_D 、 R_L 、 R_S のうち必要なものを用いて示せ。

(d) 同相分除去比 CMRR を g_m 、 r_D 、 R_L 、 R_S のうち必要なものを用いて示せ。ただし、 r_D は R_L 、 R_S に比べて十分大きいものとする。

Question No. 3: Electronic engineering (2/3)

2018年3月実施
問題3 電子工学
(2頁目/3頁中)

Answer the following questions on amplifier circuits using n-channel MOS field-effect transistors. Use Fig. 3(a) as a simplified model of the transistor. Here, g_m , r_D , and v_{GS} are a transconductance, a drain resistance, and a gate-to-source voltage of the transistor, respectively.

(1) Consider the amplifier circuit shown in Fig. 3(b).

(a) Draw the small-signal equivalent circuit.

(b) Express the voltage gain K_V in terms of g_m , r_D , R_L , R_S , and C_S .

(2) Consider the amplifier circuit shown in Fig. 3(c). Here, both transconductances of TR_1 and TR_2 are given by g_m , and both drain resistances of them are also given by r_D . The gate-to-source voltages of TR_1 and TR_2 are given by v_{GS1} and v_{GS2} , respectively.

(a) Draw the small-signal equivalent circuit.

(b) Express the voltage gain K_V in terms of g_m and r_D .

(3) Consider the differential amplifier circuit shown in Fig. 3(d). Here, both transconductances of TR_1 and TR_2 are given by g_m , and both drain resistances of them are also given by r_D . The gate-to-source voltages of TR_1 and TR_2 are given by v_{GS1} and v_{GS2} , respectively.

(a) Draw the small-signal equivalent circuit.

(b) Express the differential-mode gain K_d using g_m , r_D , R_L , and R_S as necessary.

(c) Express the common-mode gain K_c using g_m , r_D , R_L , and R_S as necessary.

(d) Express the common-mode rejection ratio CMRR using g_m , r_D , R_L , and R_S as necessary. Here, r_D is sufficiently larger than R_L and R_S .

2018年3月実施
問題3 電子工学
(3頁目/3頁中)

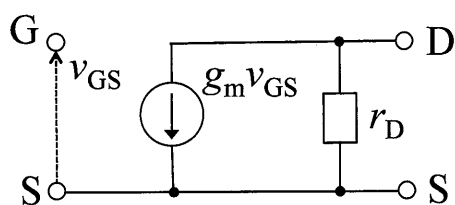


Fig. 3(a)

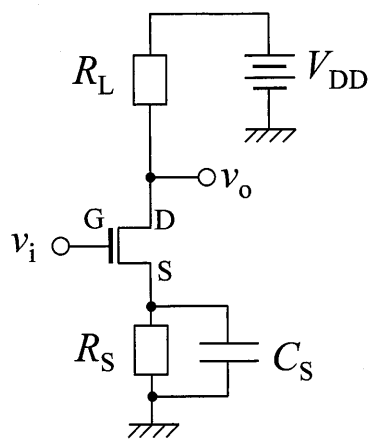


Fig. 3(b)

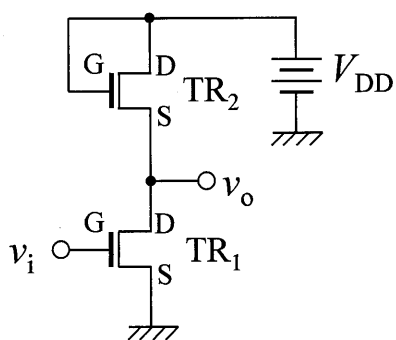


Fig. 3(c)

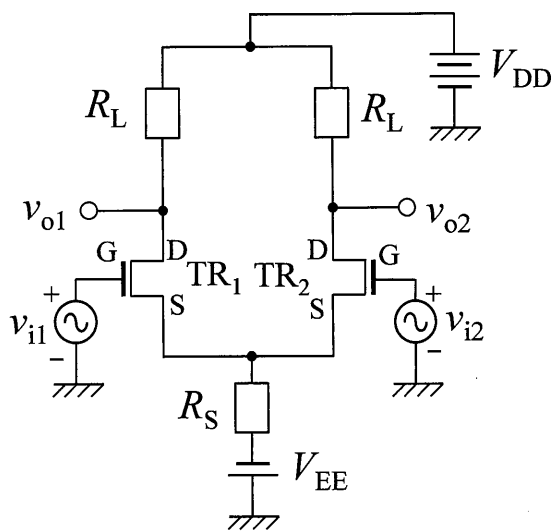


Fig. 3(d)

2018年3月実施
問題4 計算機1
(1頁目/2頁中)

クロックに同期して、各時刻 $t=1, 2, \dots$ に1ビット信号 $a_t, b_t, s_t \in \{0, 1\}$ を受け取り、1ビット信号 $z_t \in \{0, 1\}$ を出力する順序回路を考える。本順序回路において、入力系列 $s_t s_{t-1} \dots s_2 s_1$ に含まれる1の個数が偶数のとき、本順序回路の出力 z_t は入力 a_t と入力 b_t の論理積となり、1の個数が奇数のとき、出力 z_t は a_t と b_t の論理和となる。また、論理積、論理和、排他的論理和、論理否定演算子をそれぞれ $\cdot, +, \oplus, \bar{}$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) 入力系列 $a_4 a_3 a_2 a_1 = 1010$, $b_4 b_3 b_2 b_1 = 1100$, $s_4 s_3 s_2 s_1 = 0110$ に対する出力系列 $z_4 z_3 z_2 z_1$ を示せ。
- (2) 本順序回路の Mealy 型状態遷移図を示せ。ただし、その状態数は2とせよ。
- (3) 本順序回路の励起式(状態式)および出力式を最簡積和形の論理式で示せ。ただし、 a, b, s を入力信号、 z を出力信号とする。また、 $y \in \{0, 1\}$ および $Y \in \{0, 1\}$ をそれぞれ現在の状態を表す状態信号、および次の状態を表す状態信号とする。
- (4) Dフリップフロップ、2入力論理積ゲート、2入力論理和ゲートおよび2入力排他的論理和ゲートを用いて、本順序回路を図示せよ。
- (5) 1ビット信号 $c, d_0, d_1 \in \{0, 1\}$ を入力とするマルチプレクサは、 $c = 0$ のとき d_0 を出力し、 $c = 1$ のとき d_1 を出力する回路である。マルチプレクサの動作を表す論理関数を示せ。
- (6) マルチプレクサ、Dフリップフロップ、および任意の2入力論理ゲートを用いて、本順序回路を図示せよ。マルチプレクサの表記には適当な記号を用いよ。

2018年3月実施
問題4 計算機1
(2頁目/2頁中)

Consider a sequential circuit, which receives 1-bit signals $a_t, b_t, s_t \in \{0, 1\}$ and outputs a 1-bit signal $z_t \in \{0, 1\}$ at each time $t = 1, 2, \dots$ in synchronization with a clock. In this sequential circuit, when the number of 1s in the input sequence $s_t s_{t-1} \dots s_2 s_1$ is even, the output z_t of this sequential circuit becomes the logical product of the inputs a_t and b_t . On the other hand, when the number of 1s in the input sequence is odd, the output z_t of this sequential circuit becomes the logical sum of the inputs a_t and b_t . Let AND, OR, Exclusive OR, and NOT Boolean operators be denoted by $\cdot, +, \oplus,$ and $\bar{}$, respectively. Answer the following questions.

- (1) Show the output sequence $z_4 z_3 z_2 z_1$ corresponding to the input sequences $a_4 a_3 a_2 a_1 = 1010$, $b_4 b_3 b_2 b_1 = 1100$, and $s_4 s_3 s_2 s_1 = 0110$.
- (2) Draw a Mealy type state-transition diagram of the sequential circuit, where the number of its states is 2.
- (3) Show the excitation equation (state equation) and output equation of the sequential circuit using logical expressions in the minimum sum-of-products form. Let $a, b,$ and s be the input signals and z be the output signal. Let $y \in \{0, 1\}$ and $Y \in \{0, 1\}$ be the state signal representing the current state and the state signal representing the next state, respectively.
- (4) Draw a circuit diagram of the sequential circuit with D flip-flops, 2-input AND gates, 2-input OR gates, and 2-input Exclusive-OR gates.
- (5) A multiplexer with 1-bit signals $c, d_0, d_1 \in \{0, 1\}$ is a circuit which outputs d_0 when $c = 0$ and d_1 when $c = 1$. Show the logic function that represents the operation of the multiplexer.
- (6) Draw a circuit diagram of the sequential circuit with multiplexers, D flip-flops, and arbitrary 2-input logic gates. Use appropriate symbols to represent multiplexers.

2018年 3月実施 問題5 計算機2 (1頁目/2頁中)

以下の手続き型プログラミング言語を考える。

$$P ::= x=x-x \mid [P;P] \mid w[x]P$$

$$x ::= a \mid b$$

ここで、 P および x はプログラムおよび変数をそれぞれ表す非終端記号であり、 $a, b, w, =, -, [, ;, \text{および}$] は終端記号である。変数 a と b は整数の値を保持する。変数の初期値はプログラムの外から実行前に与えられる。各構文の意味は以下の通りである。 $x_1=x_2-x_3$ は、 x_2 の値から x_3 の値を引いた数で x_1 の値を置き換える。 $[P_1;P_2]$ は、 P_1 と P_2 をこの順に続けて実行する。 $w[x]P$ は、 x の値が0以下になるまで P の実行を繰り返す。

A および B を変数の値に関する条件とする。 P の実行前に A が成り立つならば P が停止したときに B が成り立つことを $\{A\}P\{B\}$ と書く。以下の規則の組み合わせのみから $\{A\}P\{B\}$ が得られることを $\vdash \{A\}P\{B\}$ と書く。

- 規則 1** P が $x_1=x_2-x_3$ という形るとき、 B に現れる全ての x_1 を式 x_2-x_3 に置き換えて得られた条件が A と文字通り一致するならば、 $\{A\}P\{B\}$ である。
- 規則 2** P が $[P_1;P_2]$ という形るとき、ある条件 C が存在し $\{A\}P_1\{C\}$ かつ $\{C\}P_2\{B\}$ ならば、 $\{A\}P\{B\}$ である。
- 規則 3** P が $w[x]P'$ という形るとき、 $\{A \text{ かつ } x > 0\}P'\{A\}$ ならば、 $\{A\}P\{A \text{ かつ } x \leq 0\}$ である。
- 規則 4** ある条件 C, D が存在し、 C は A の必要条件、 D は B の十分条件であるとき、 $\{C\}P\{D\}$ ならば、 $\{A\}P\{B\}$ である。

例えば、 $\vdash \{a \geq 0\} w[a] [a=a-a] \{a = 0\}$ である。なぜならば、

1. $\{a - a \geq 0\} a=a-a \{a \geq 0\}$ (規則 1)
2. $\{a \geq 0 \text{ かつ } a > 0\} a=a-a \{a \geq 0\}$ (規則 4)
3. $\{a \geq 0\} w[a] [a=a-a] \{a \geq 0 \text{ かつ } a \leq 0\}$ (規則 3)
4. $\{a \geq 0\} w[a] [a=a-a] \{a = 0\}$ (規則 4)

だからである。

\mathcal{F} をプログラム $w[a] [a=b-a; b=b-a]$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) \mathcal{F} の構文木を、 \mathcal{F} の全ての終端記号が葉として現れる木構造として図示せよ。
- (2) 初期値を $(a, b) = (23, 41)$ として \mathcal{F} を実行し、 \mathcal{F} が停止したときの a と b の値を求めよ。
- (3) $\vdash \{ \text{ある整数 } i \text{ が存在し, } i \geq 0 \text{ かつ } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \mathcal{F} \{ b = 1 \}$ を示せ。
- (4) a および b の任意の初期値に対して \mathcal{F} が停止するかどうか判定せよ。その根拠を示せ。

2018年 3月実施 問題5 計算機2 (2頁目 / 2頁中)

Consider the following imperative programming language:

$$P ::= x=x-x \mid [P;P] \mid w[x]P$$

$$x ::= a \mid b$$

where P and x are non-terminal symbols that denote programs and variables, respectively, and $a, b, w, =, -, [, ;,$ and $]$ are terminal symbols. Each of the variables a and b holds an integer value. Their initial values are given from outside of a program before execution. The semantics of each syntax is as follows. $x_1=x_2-x_3$ replaces the value of x_1 with the integer obtained by subtracting the value of x_3 from that of x_2 . $[P_1;P_2]$ executes P_1 and P_2 sequentially in this order. $w[x]P$ iterates P until the value of x is less than or equal to zero.

Let A and B be propositions on the values of the variables. We say $\{A\}P\{B\}$ if, whenever A holds before the execution of P , B holds at the time when P terminates. We say $\vdash \{A\}P\{B\}$ if $\{A\}P\{B\}$ is obtained just by a combination of the following rules:

- Rule 1** When P is of the form $x_1=x_2-x_3$, if A is literally identical to the proposition obtained by replacing every occurrence of x_1 in B with the expression x_2-x_3 , then $\{A\}P\{B\}$.
- Rule 2** When P is of the form $[P_1;P_2]$, if there exists a proposition C such that $\{A\}P_1\{C\}$ and $\{C\}P_2\{B\}$, then $\{A\}P\{B\}$.
- Rule 3** When P is of the form $w[x]P'$, if $\{A \text{ and } x > 0\}P'\{A\}$, then $\{A\}P\{A \text{ and } x \leq 0\}$.
- Rule 4** When there exist two propositions C and D such that C is a necessary condition for A , and D is a sufficient condition for B , if $\{C\}P\{D\}$, then $\{A\}P\{B\}$.

For example, $\vdash \{a \geq 0\} w[a] [a=a-a] \{a = 0\}$ holds because

1. $\{a - a \geq 0\} a=a-a \{a \geq 0\}$ (Rule 1),
2. $\{a \geq 0 \text{ and } a > 0\} a=a-a \{a \geq 0\}$ (Rule 4),
3. $\{a \geq 0\} w[a] [a=a-a] \{a \geq 0 \text{ and } a \leq 0\}$ (Rule 3), and
4. $\{a \geq 0\} w[a] [a=a-a] \{a = 0\}$ (Rule 4).

Let \mathcal{F} be the program $w[a] [a=b-a; b=b-a]$. Answer the following questions.

- (1) Draw the syntax tree of \mathcal{F} such that all the terminal symbols in \mathcal{F} occur in its leaves.
- (2) Execute \mathcal{F} with initial values $(a, b) = (23, 41)$ and calculate the values of a and b at the time when \mathcal{F} terminates.
- (3) Show $\vdash \{\text{for some integer } i, i \geq 0 \text{ and } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \mathcal{F} \{b = 1\}$.
- (4) Determine whether or not \mathcal{F} terminates for any initial values of a and b . Justify your answer.

2018年3月実施 問題6 物理専門 (1頁目 / 2頁中)

ハミルトニアンが次式で与えられる，一様な静電場 F の中にある電荷 e を持った1次元調和振動子を考える．

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - eF\hat{x} \quad (6A)$$

ただし，

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad (6B)$$

である． m と ω はそれぞれ粒子の質量，角振動数である． \hat{x} と \hat{p} はそれぞれ位置演算子，運動量演算子であり，次の関係式を満たす．

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (6C)$$

ここで， i と \hbar はそれぞれ虚数単位とプランク定数を 2π で割った数である．さらに，消滅演算子 \hat{a} と生成演算子 \hat{a}^\dagger は次のように定義される．

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right) \quad (6D)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right) \quad (6E)$$

ここで，次の関係式が成立する．

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (6F)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (6G)$$

ただし， $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) はハミルトニアン \hat{H}_0 の規格化された固有ベクトルとする．以下の間に答えよ．

- (1) \hat{H}_0 を ω , \hbar , \hat{a} , \hat{a}^\dagger を用いて表せ．
- (2) $|n\rangle$ に対する \hat{H}_0 の固有値 E_0 を ω , \hbar , n を用いて表せ．
- (3) 次の関係式が成立することを示せ．

$$\langle n|\hat{x}|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1} \right) \quad (6H)$$

ただし， n' , $\delta_{n,n'}$ はそれぞれ非負の整数，クロネッカーのデルタである．

- (4) $-eF\hat{x}$ を摂動ハミルトニアンとして， $|n\rangle$ に対する1次の摂動エネルギー E_1 を求めよ．
- (5) $-eF\hat{x}$ を摂動ハミルトニアンとして， $|n\rangle$ に対する2次の摂動エネルギー E_2 を求めよ．

**2018年3月実施
問題6 物理専門
(2頁目 / 2頁中)**

Consider a one-dimensional harmonic oscillator with charge e in a homogeneous static electric field F , whose Hamiltonian is given by

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - eF\hat{x}, \quad (6A)$$

where

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \quad (6B)$$

m and ω are the mass of a particle and the angular frequency, respectively. \hat{x} and \hat{p} are the position and momentum operators, respectively, and they satisfy the following relation:

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar, \quad (6C)$$

where i and \hbar are the imaginary unit and the Planck constant divided by 2π , respectively. Moreover, the annihilation and creation operators \hat{a} and \hat{a}^\dagger are defined as follows:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right), \quad (6D)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right). \quad (6E)$$

Here, the following relations hold.

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (6F)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (6G)$$

where $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) is a normalized eigenvector of the Hamiltonian \hat{H}_0 . Answer the following questions.

- (1) Express \hat{H}_0 in terms of ω , \hbar , \hat{a} , and \hat{a}^\dagger .
- (2) Express the eigenvalue E_0 of \hat{H}_0 for $|n\rangle$ in terms of ω , \hbar , and n .
- (3) Show that the following relation holds.

$$\langle n|\hat{x}|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1} \right), \quad (6H)$$

where n' and $\delta_{n,n'}$ are a non-negative integer and the Kronecker delta, respectively.

- (4) Obtain the first-order perturbation energy E_1 for $|n\rangle$ using $-eF\hat{x}$ as a perturbation Hamiltonian.
- (5) Obtain the second-order perturbation energy E_2 for $|n\rangle$ using $-eF\hat{x}$ as a perturbation Hamiltonian.