

2017年3月実施  
問題1 電気工学  
(1頁目 / 3頁中)

Fig. 1(a)に示すリニアモータの電気機械系を考える。このリニアモータは巻線の中に永久磁石でできた可動部があり、巻線電流により発生する磁界により推力を得る。それぞれ、 $M$ は可動部の質量、 $v(t)$ は可動部の速度、 $f(t)$ は推力、 $d(t)$ は摩擦力である。ここで、 $d(t) = \gamma v(t)$ の関係があり、 $\gamma$ は摩擦係数である。また、Fig. 1(b)にリニアモータの電気的等価回路を示す。それぞれ、 $R$ は巻線抵抗、 $L$ は巻線インダクタンス、 $e(t)$ は入力電圧、 $i(t)$ は巻線電流、 $e_m(t)$ は速度起電力である。ここで、 $f(t) = K_f i(t)$ 、 $e_m(t) = K_e v(t)$ の関係があり、 $K_f$ と $K_e$ はそれぞれ推力定数および速度起電力定数である。また、 $E(s)$ 、 $E_m(s)$ 、 $I(s)$ 、 $F(s)$ 、および $V(s)$ はそれぞれ $e(t)$ 、 $e_m(t)$ 、 $i(t)$ 、 $f(t)$ 、および $v(t)$ のラプラス変換である。次の間に答えよ。

- (1)  $E(s)$ を入力、 $V(s)$ を出力としたとき、このリニアモータの電気機械系のブロック線図はFig. 1(c)のように描くことができる。伝達関数 $G_1(s)$ と $G_2(s)$ を導け。ただし、伝達関数 $G_1(s)$ はFig. 1(b)の回路方程式から求められ、伝達関数 $G_2(s)$ はFig. 1(a)の可動部の運動方程式から求められる。
- (2) Fig. 1(c)のブロック線図を簡略化し、パラメータ $M$ 、 $\gamma$ 、 $R$ 、 $L$ 、 $K_f$ 、 $K_e$ の数値が与えられたとき、Fig. 1(d)に示すブロック線図が得られた。閉ループ伝達関数 $G_3(s)$ を求めよ。さらに、入力 $e(t)$ が単位インパルスの際の出力 $v(t)$ を求めよ。
- (3) このリニアモータの速度制御系をFig. 1(e)に示す。ここで、 $R(s)$ は目標速度のラプラス変換である。次の間に答えよ。
  - (a) この速度制御系の閉ループ伝達関数 $G_5(s)$ を求めよ。
  - (b)  $G_4(s)$ が問(2)で求めた閉ループ伝達関数 $G_3(s)$ のとき、この制御系が安定になるための $A$ の範囲を求めよ。

2017年3月実施  
問題1 電気工学  
(2頁目 / 3頁中)

Consider the electromechanical system of a linear motor shown in Fig. 1(a). The linear motor has a moving part made of a permanent magnet inside the winding and the thrust force originates from the magnetic field due to the winding current.  $M$  is the mass of the moving part,  $v(t)$  is the velocity of the moving part,  $f(t)$  is the thrust force, and  $d(t)$  is the friction force, respectively. Here,  $d(t) = \gamma v(t)$  and  $\gamma$  is the friction coefficient. The electrical equivalent circuit of the linear motor is shown in Fig. 1(b).  $R$  is the winding resistance,  $L$  is the winding inductance,  $e(t)$  is the input voltage,  $i(t)$  is the winding current, and  $e_m(t)$  is the speed electromotive force, respectively. Here,  $f(t) = K_f i(t)$ ,  $e_m(t) = K_e v(t)$ , where  $K_f$  and  $K_e$  are the thrust force coefficient and the speed electromotive force coefficient, respectively.  $E(s)$ ,  $E_m(s)$ ,  $I(s)$ ,  $F(s)$  and  $V(s)$  are the Laplace transforms of  $e(t)$ ,  $e_m(t)$ ,  $i(t)$ ,  $f(t)$  and  $v(t)$ , respectively. Answer the following questions.

- (1) A block diagram of the electromechanical system of the linear motor can be drawn as shown in Fig. 1(c) assuming  $E(s)$  is an input and  $V(s)$  is an output. Derive the transfer functions  $G_1(s)$  and  $G_2(s)$ . The transfer function  $G_1(s)$  can be derived from the circuit equation for Fig. 1(b) and the transfer function  $G_2(s)$  can be derived from the equation of motion of the moving part in Fig. 1(a).
- (2) The block diagram in Fig. 1(d) was obtained by simplifying the block diagram of Fig. 1(c) when the values of the parameters  $M$ ,  $\gamma$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $K_f$ , and  $K_e$  were given. Derive the closed-loop transfer function  $G_3(s)$ . Also derive the output  $v(t)$  when the input  $e(t)$  is a unit impulse.
- (3) A speed control system of the linear motor is shown in Fig. 1(e). Here,  $R(s)$  is the Laplace transform of a target speed. Answer the following questions.
  - (a) Derive the closed-loop transfer function  $G_5(s)$  of the speed control system.
  - (b) Find the range of values of  $A$  so that the control system is stable, assuming  $G_4(s)$  is equal to the closed-loop transfer function  $G_3(s)$  which was derived in question (2).

2017年3月実施  
問題1 電気工学  
(3頁目 / 3頁中)

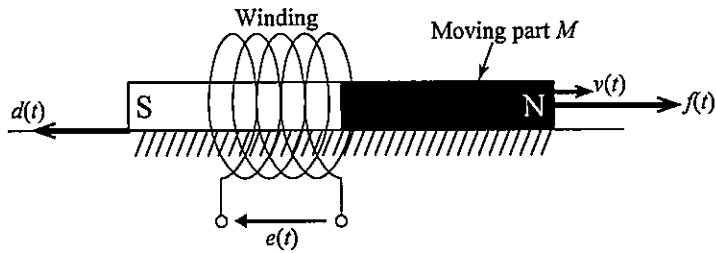


Fig. 1 (a)

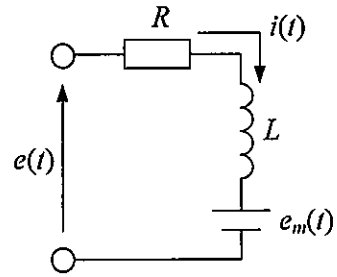


Fig. 1 (b)

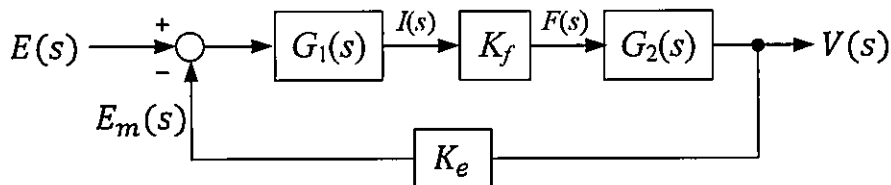


Fig. 1 (c)

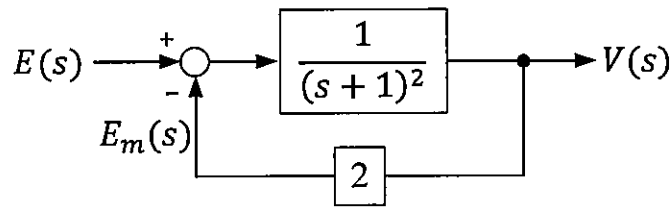


Fig. 1 (d)

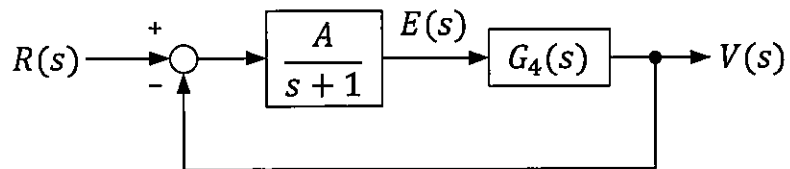


Fig. 1 (e)

2017年3月実施  
問題2 通信工学  
(1頁目/2頁中)

Fig. 2 に示すような通信システムを考える. 送信機と受信機中の理想低域通過フィルタ (LPF) の伝達関数  $H_{LPF}(f)$  は

$$H_{LPF}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq D \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる. 送信機の搬送波と受信機の局部発振波はそれぞれ  $\cos(2\pi f_c t)$ ,  $2\cos(2\pi f_c t)$  であり,  $f_c$  は搬送波の周波数で,  $f_c \gg D$  である. 以下の式で表される入力信号  $s(t)$  を考える.

$$s(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

以下の間に答えよ. ただし,  $D = 1/T$  であり伝送路における損失はないものとする.

- (1)  $s(t)$  のフーリエ変換を求め, 振幅スペクトル  $|S(f)|$  を図示せよ.
- (2) 点 A における信号  $s'(t)$  の振幅スペクトル  $|S'(f)|$  を図示せよ.
- (3) 点 B, C における入力信号のスペクトルをそれぞれ  $S'(f)$  で表わし, それらの振幅スペクトルを図示せよ.
- (4) Fig. 2 において  $n(t) = 0$  の時, 受信機の出力信号  $y(t)$  は点 A における信号と等しいことを示せ.
- (5) 伝送路に  $n(t) \neq 0$  が付加されている時, 受信機の出力における雑音電力を求めよ. ただし, 白色雑音の両側電力スペクトル密度を  $N_0/2$  とする.

2017年3月実施  
問題2 通信工学  
(2頁目/2頁中)

Consider a transmission system as shown in Fig. 2. The transfer functions  $H_{LPF}(f)$  of the ideal low pass filters (LPFs) used in the transmitter and receiver are given by

$$H_{LPF}(f) = \begin{cases} 1, & \text{if } |f| \leq D \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let the carrier wave at the transmitter and the local oscillator signal at the receiver be  $\cos(2\pi f_c t)$  and  $2\cos(2\pi f_c t)$ , respectively, and  $f_c$  is the frequency of the carrier, where  $f_c \gg D$ . Consider the input signal  $s(t)$  expressed as follows,

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{when } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Answer the following questions. Assume  $D = 1/T$  and the transmission line is lossless.

- (1) Derive the Fourier transform of  $s(t)$ , and sketch the amplitude spectrum  $|S(f)|$ .
- (2) Sketch the amplitude spectrum  $|S'(f)|$  of signal  $s'(t)$  at the point A.
- (3) Formulate spectra of the input signal at the points B and C using  $S'(f)$ , and sketch their amplitude spectra.
- (4) Show that the output signal  $y(t)$  is equal to the signal at the point A when  $n(t) = 0$  in Fig. 2.
- (5) Derive the noise power at the output of the receiver when  $n(t) \neq 0$  is added to the transmission line. The white noise has a double-sided power spectral density of  $N_0/2$ .

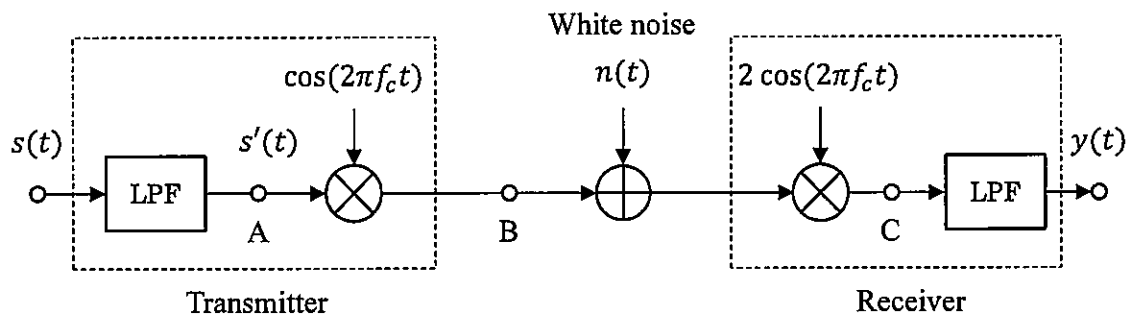


Fig. 2

2017年3月実施  
問題3 電子工学  
(1頁目/2頁中)

(1) Si 半導体を用いた電子デバイスに関連して、以下の問に答えよ。

- (a) p 形および n 形 Si 半導体の接合部において、拡散電位と空乏層が生じる理由を述べるとともに、拡散電位を示したエネルギーバンド図を描け。
- (b) エミッタ (E), ベース (B), コレクタ (C) の電極を有する Fig. 3(a) の npn 接合のバイポーラトランジスタを考える。ベース・エミッタ電極間に印加する電圧が拡散電位に達しない場合であっても、コレクタ・エミッタ電極間に電流が流れ始める理由を、エネルギーバンド図を用いて説明せよ。
- (c) Fig. 3(a) のトランジスタにおいて大きなベース接地電流利得  $\alpha$  を得るために、ベースの p 形半導体層の厚みと不純物濃度に求められる条件を定性的に述べよ。

(2) npn バイポーラトランジスタを用いた Fig. 3(b) の増幅回路について、以下の問に答えよ。

ここで電圧  $v_i$  および  $v_o$  は、それぞれ入力端子および出力端子の微小信号交流電圧である。また、この増幅回路を使用する周波数範囲では、結合コンデンサ  $C_c$  のインピーダンスはゼロと見なせるものとする。E, B および C は、それぞれエミッタ、ベースおよびコレクタを意味する。

- (a) この増幅回路の微小信号等価回路を、Fig. 3(c) の微小信号トランジスタモデルを用いて描け。
- (b) この増幅器の出力開放電圧利得  $K_v (\equiv v_o / v_i)$  を導出せよ。

(1) Answer the following questions on an electronic device using Si semiconductors.

- (a) Explain the reason why the diffusion potential and the depletion layer are induced at the junction of n-type and p-type Si semiconductors, and draw the energy band diagram showing the diffusion potential.
- (b) Consider an npn-junction bipolar transistor with emitter (E), base (B) and collector (C) electrodes in Fig. 3(a). Explain the reason why a current starts to flow between the collector and emitter electrodes by using the energy band diagram, even when a voltage applied between the base and emitter electrodes does not reach the diffusion potential.
- (c) Describe qualitatively the conditions on the thickness and the impurity density of the base p-type semiconductor layer, which are required for obtaining a large common-base current gain  $\alpha$  in the transistor shown in Fig. 3(a).

2017年3月実施  
問題3 電子工学  
(2頁目/2頁中)

(2) Answer the following questions on an amplifier circuit using an npn bipolar transistor shown in Fig. 3(b). Here, the voltages  $v_i$  and  $v_o$  are the small-signal alternating voltages at the input and output terminals, respectively. Moreover, the impedance of the coupling capacitor  $C_C$  is regarded as zero for the frequency range used for the amplifier circuit. E, B and C mean emitter, base and collector, respectively.

(a) Draw the small-signal equivalent circuit for the amplifier circuit by using the small-signal transistor model shown in Fig. 3(c).

(b) Derive the open-circuit voltage gain  $K_V (\equiv v_o/v_i)$  for the amplifier circuit.

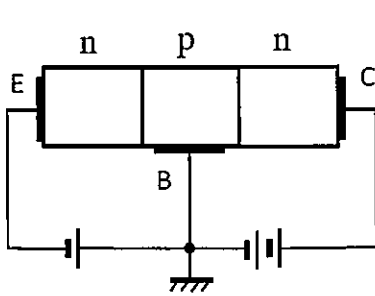


Fig. 3 (a)

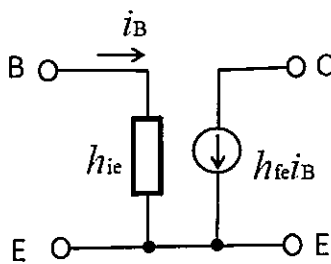


Fig. 3 (c)

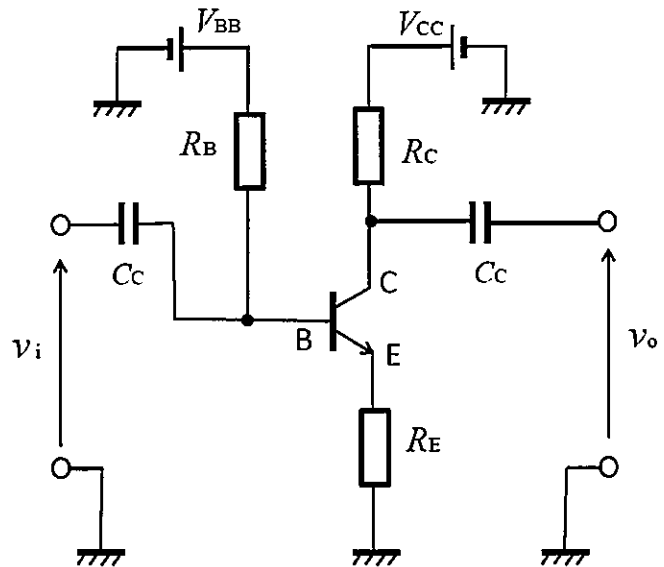


Fig. 3 (b)

2017年3月実施  
問題4 計算機1  
(1頁目/2頁中)

クロックに同期して、各時刻  $t = 1, 2, \dots$  に1ビット信号  $x_t \in \{0, 1\}$  を受け取り、1ビット信号  $z_t \in \{0, 1\}$  を出力する順序回路を考える。本順序回路の出力  $z_t$  は

$$\left( \sum_{i=1}^t 2^{t-i} \cdot x_i \right) \bmod 8 = 0$$

のときに1、それ以外では0となる。ただし  $p \bmod q$  は  $p$  を  $q$  で割った余りを表す。以下の問に答えよ。

- (1) 入力系列  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 110001$  に対する出力系列  $z_1z_2z_3z_4z_5z_6$  を示せ。
- (2) できるだけ少ない状態数を用いて、本順序回路の状態遷移図を示せ。
- (3) 本順序回路の励起式（状態式）および出力式を最簡積和形の論理式で示せ。ただし、 $x, z, y_j \in \{0, 1\}$  および  $Y_j \in \{0, 1\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) をそれぞれ入力信号、出力信号、現在の状態を表す状態信号、および次の状態を表す状態信号とする。また、論理積、論理和、否定演算子をそれぞれ  $\cdot, +, \bar{\quad}$  とする。
- (4) 本順序回路をDフリップフロップおよび2入力NORゲートを用いて構成せよ。
- (5) 本順序回路をDフリップフロップおよび2入力NANDゲートを用いて構成せよ。



Question No. 4: Computer science 1 (2/2)

2017年3月実施  
問題4 計算機1  
(2頁目/2頁中)

Consider a sequential circuit which receives one 1-bit signal  $x_t \in \{0, 1\}$  and outputs one 1-bit signal  $z_t \in \{0, 1\}$  at each time  $t = 1, 2, \dots$  in synchronization with a clock. The output  $z_t$  of this sequential circuit is 1 if

$$\left( \sum_{i=1}^t 2^{t-i} \cdot x_i \right) \bmod 8 = 0,$$

and 0 otherwise. Note that " $p \bmod q$ " denotes the remainder of  $p$  divided by  $q$ . Answer the following questions.

- (1) Show the output sequence  $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6$  corresponding to the input sequence  $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = 110001$ .
- (2) Draw a state-transition diagram of the sequential circuit with as few states as possible.
- (3) Show the excitation equations (state equations) and output equation of the sequential circuit using logical expressions in the minimum sum-of-products form. Suppose that  $x, z, y_j \in \{0, 1\}$  and  $Y_j \in \{0, 1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , are the input signal, output signal, current state signal and next state signal, respectively. Let AND, OR, and NOT Boolean operators be denoted by  $\cdot$ ,  $+$ , and  $\bar{\phantom{x}}$ .
- (4) Draw a circuit diagram of the sequential circuit using D flip-flops and 2-input NOR gates.
- (5) Draw a circuit diagram of the sequential circuit using D flip-flops and 2-input NAND gates.

2017年3月実施  
問題5 計算機2  
(1頁目 / 4頁中)

Fig. 5 (a) の構文を持つプログラミング言語を考える。ただし、各式の意味は Fig. 5 (b) の通りであるとする。たとえば、Fig. 5 (c) で与えられるプログラムの下で式  $f(1, 1)$  は

$$f(1, 1) \rightarrow succ(f(0, 1)) \rightarrow succ(1) \rightarrow 2$$

のように評価される。また、このプログラムの下での  $g(1)$  の評価のように、プログラムの下での式の評価は停止しないことがある。

(1) Fig. 5 (c) のプログラムについて以下の間に答えよ。

- (a) このプログラムの下で  $f(0, 2)$  および  $f(2, 2)$  を評価せよ。評価の過程も示せ。
- (b) 任意の自然数  $m$  と  $n$  に対し、このプログラムの下で  $f(m, n)$  が  $m + n$  に評価されることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) この言語におけるプログラミングに関する以下の間に答えよ。

- (a) 自然数同士の乗算を行う関数  $mul$  を含むプログラムを与えよ。
- (b) 自然数  $m$  と  $n$  の大小比較を行う関数  $le$  を含むプログラムを与えよ。ただし、このプログラムの下で  $le(m, n)$  は、 $m \leq n$  ならば 1 に、そうでなければ 0 に評価される。

(3) このプログラミング言語において、任意のプログラム  $p$  とその中で定義される任意の 1 引数関数  $h$  に対し、各組に 1 つの自然数  $n_{ph}$  を割り当てる単射が存在する。このとき、関数  $halt$  を含むプログラム  $p_{halt}$  で次の性質を満たすものをこのプログラミング言語上で与えることはできない。

任意のプログラム  $p$  とその中で定義される任意の 1 引数関数  $h$  および任意の自然数  $m$  について、プログラム  $p_{halt}$  の下で  $halt(n_{ph}, m)$  は、 $p$  の下で  $h(m)$  の評価が停止するときは 1 に、そうでないときには 0 に評価される。

このことを以下の手順に従い示せ。

- 上記のようなプログラム  $p_{halt}$  が存在することを仮定し、 $p_{halt}$  に以下の関数を加えたプログラム  $p$  を考えよ。

$$\begin{aligned} h(x) &= \text{ifz } halt(x, x) \text{ then } 0 \text{ else } loop() \\ loop() &= loop() \end{aligned}$$

- $p$  の下で  $h(n_{ph})$  の評価が停止するか否かを議論せよ。

2017年3月実施  
問題5 計算機2  
(2頁目 / 4頁中)

Consider the programming language whose syntax is given in Fig. 5 (a), where the semantics of each expression is given in Fig. 5 (b). For example, under the program given in Fig. 5 (c), the expression  $f(1, 1)$  evaluates as follows.

$$f(1, 1) \rightarrow succ(f(0, 1)) \rightarrow succ(1) \rightarrow 2$$

Notice that the evaluation of an expression under a program may not terminate, such as the evaluation of  $g(1)$  under this program.

- (1) Answer the following questions on the program given in Fig. 5 (c).
  - (a) Evaluate  $f(0, 2)$  and  $f(2, 2)$  under this program. Show your working.
  - (b) Prove by induction that  $f(m, n)$  evaluates to  $m+n$  under this program for any natural numbers  $m$  and  $n$ .
- (2) Answer the following questions on programming in this language.
  - (a) Give a program containing a function  $mul$  that multiplies two natural numbers.
  - (b) Give a program containing a function  $le$  that compares two natural numbers  $m$  and  $n$ , such that  $le(m, n)$  evaluates to 1 under the program if  $m \leq n$ , and 0 otherwise.
- (3) For this programming language, there exists an injective mapping that assigns a natural number  $n_{ph}$  to each pair of any program  $p$  and any unary function  $h$  defined in  $p$ . Then, it is *impossible* to give, in this programming language, a program  $p_{halt}$  containing a function  $halt$  and satisfying the following property.

For any program  $p$  and any unary function  $h$  defined in  $p$ , and for any natural number  $m$ ,  $halt(n_{ph}, m)$  evaluates to 1 under  $p_{halt}$  if the evaluation of  $h(m)$  terminates under  $p$ , and 0 otherwise.

Prove this fact according to the instructions below.

- Suppose that there exists such a program  $p_{halt}$ . Consider a program  $p$  obtained by adding the following functions to  $p_{halt}$ .

$$\begin{aligned} h(x) &= \text{ifz } halt(x, x) \text{ then } 0 \text{ else } loop() \\ loop() &= loop() \end{aligned}$$

- Discuss whether the evaluation of  $h(n_{ph})$  terminates under  $p$  or not.

2017年3月実施  
問題5 計算機2  
(3頁目 / 4頁中)

プログラム / program	
$p ::= d_1 \dots d_n$	
関数定義 / function definition	
$d ::= f(x_1, \dots, x_n) = e$	
式 / expression	
$e ::= n$	(自然数定数 / natural-number constant)
$succ(e)$	(後者関数 / successor function)
$pred(e)$	(前者関数 / predecessor function)
$x$	(変数 / variable)
<b>ifz</b> $e_1$ <b>then</b> $e_2$ <b>else</b> $e_3$	(条件分岐 / conditional branching)
$f(e_1, \dots, e_n)$	(関数呼出 / function call)

Fig. 5 (a)

2017年3月実施  
問題5 計算機2  
(4頁目 / 4頁中)

$n$	評価結果は $n$ となる。 Its evaluation result is $n$ .
$succ(e)$	$e$ を評価し、その結果を $n$ とする。すると全体の式の評価結果は $n + 1$ となる。 Evaluate $e$ and let $n$ be the result. Then, the evaluation result of the whole expression is $n + 1$ .
$pred(e)$	$e$ を評価し、その結果を $n$ とする。もし $n \neq 0$ ならば、全体の式の評価結果は $n - 1$ となり、そうでなければ $0$ となる。 Evaluate $e$ and let $n$ be the result. Then, the evaluation result of the whole expression is $n - 1$ if $n \neq 0$ , and otherwise it is $0$ .
$ifz e_1 \text{ then } e_2 \text{ else } e_3$	まず $e_1$ を評価する。その結果が $0$ であれば $e_2$ を評価し、そうでなければ $e_3$ を評価する。 Evaluate $e_1$ . If its result is $0$ , evaluate $e_2$ , and otherwise evaluate $e_3$ .
$f(e_1, \dots, e_k)$	$f(x_1, \dots, x_k) = e$ という関数定義が存在するとする。まず各 $e_i$ , ただし $1 \leq i \leq k$ , を評価し、その結果を $n_i$ とする。その後、関数 $f$ の本体 $e$ の各 $x_i$ を自然数定数式 $n_i$ で置き換えることで得られる式を評価する。 Suppose that there exists a function definition $f(x_1, \dots, x_k) = e$ . Evaluate each $e_i$ , $1 \leq i \leq k$ , and let $n_i$ be its evaluation result. Then, evaluate the expression obtained from the function body $e$ of $f$ by replacing each $x_i$ with the natural-number constant expression $n_i$ .

Fig. 5 (b)

$f(x, y) = ifz x \text{ then } y \text{ else } succ(f(pred(x), y))$ $g(x) = g(x)$
---

Fig. 5 (c)

2017年3月実施  
問題6 物理専門  
(1頁目/2頁中)

$\hat{A}$  および  $\hat{B}$  をある量子系における2つの可換な物理量とし,  $\hat{A}$  および  $\hat{B}$  の固有値を各々  $a = \pm 1$  および  $b = \pm 1$  とする. この系の状態は,  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の共通固有状態, すなわち

$$|a, b\rangle \quad (a = \pm 1, b = \pm 1)$$

を正規直交基底として

$$|\psi\rangle = \alpha|1, 1\rangle + \beta|1, -1\rangle + \gamma|-1, 1\rangle + \delta|-1, -1\rangle$$

と書ける. ここで,  $\alpha, \beta, \gamma$  および  $\delta$  は,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$  を満たす複素数である. 以下の問に答えよ.

(1)  $|\psi\rangle$  に対する  $\hat{A}$  の期待値  $\langle A \rangle$  および  $\hat{B}$  の期待値  $\langle B \rangle$  を求めよ.

(2) 物理量  $\hat{C}$  を

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$$

とする.  $\hat{C}$  のすべての固有値およびそれらに対応する規格化された固有状態を求めよ.

(3) 物理量  $\hat{X}$  を

$$\hat{X} = \hat{A}\hat{B}$$

とする.  $\hat{X}$  のすべての固有値およびそれらに対応する規格化された固有状態を求めよ.

(4) 物理量  $\hat{Y}$  に対して

$$\langle a, b | \hat{Y} | a', b' \rangle = \begin{cases} 0 & (a = a' \text{ or } b = b') \\ 1 & (a \neq a' \text{ and } b \neq b') \end{cases}$$

とする.  $\hat{Y}$  のすべての固有値およびそれらに対応する規格化された固有状態を求めよ.

(5) 問(3)の  $\hat{X}$  と問(4)の  $\hat{Y}$  が互いに可換であることを示せ. また,  $\hat{X}$  および  $\hat{Y}$  の共通固有状態を,  $\hat{X}$  および  $\hat{Y}$  の固有値のすべての組み合わせについて求めよ.

**2017年3月実施**  
**問題6 物理専門**  
**(2頁目 / 2頁中)**

Let  $\hat{A}$  and  $\hat{B}$  be two commuting physical quantities of a quantum system, and let  $a = \pm 1$  and  $b = \pm 1$  be the eigenvalues of  $\hat{A}$  and  $\hat{B}$ , respectively. Using the common eigenstates of  $\hat{A}$  and  $\hat{B}$ , namely

$$|a, b\rangle \quad (a = \pm 1, b = \pm 1),$$

as an orthonormal bases set, the system state is written as

$$|\psi\rangle = \alpha|1, 1\rangle + \beta|1, -1\rangle + \gamma|-1, 1\rangle + \delta|-1, -1\rangle,$$

where  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $\delta$  are complex values satisfying  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ . Answer the following questions.

(1) Let  $\langle A \rangle$  and  $\langle B \rangle$  be the expectation values of  $\hat{A}$  and  $\hat{B}$ , respectively. Obtain  $\langle A \rangle$  and  $\langle B \rangle$  for  $|\psi\rangle$ .

(2) Let a physical quantity  $\hat{C}$  be

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}.$$

Obtain all the eigenvalues of  $\hat{C}$  and the corresponding normalized eigenstates.

(3) Let a physical quantity  $\hat{X}$  be

$$\hat{X} = \hat{A}\hat{B}.$$

Obtain all the eigenvalues of  $\hat{X}$  and the corresponding normalized eigenstates.

(4) For a physical quantity  $\hat{Y}$ , let

$$\langle a, b | \hat{Y} | a', b' \rangle = \begin{cases} 0 & (a = a' \text{ or } b = b') \\ 1 & (a \neq a' \text{ and } b \neq b'). \end{cases}$$

Obtain all the eigenvalues of  $\hat{Y}$  and the corresponding normalized eigenstates.

(5) Show that  $\hat{X}$  in question (3) and  $\hat{Y}$  in question (4) commute with each other. Then, obtain the common eigenstates of  $\hat{X}$  and  $\hat{Y}$  for all the combinations of the eigenvalues of  $\hat{X}$  and  $\hat{Y}$ .