

2016年3月実施
問題1 電磁気学
(1頁目/2頁中)

Fig.1(a)~(c)に示すように、半径 a の 2 枚の導体円板電極を平行に配置する。電極間隔を $2d$ ($\ll a$) とし、電極間は真空または一部が誘電体 (誘電率 ϵ) で満たされている。以下の間に答えよ。ただし、真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 とし、電極の端部効果は無視できるものとする。

(1) Fig.1(a)に示すように、導体円板電極間が真空の場合で、上下の電極が電荷 $+Q, -Q$ でそれぞれ帯電しているとき、電極間の電界の大きさ E_1 を求めよ。また、電極間の静電容量 C_1 を求めよ。

(2) Fig.1(a)に示す上下の導体円板電極上の電荷が

$$+Q(t) = +Q_0 \cos \omega t, \quad -Q(t) = -Q_0 \cos \omega t,$$

でそれぞれ時間変動するとき、電極間に生じる変位電流の大きさ $J_1(t)$ と半径 r ($< a$) の位置での磁束密度の大きさ $B_1(t)$ を求めよ。また、電極間空間の中心軸 c から半径 a の円筒側面でのポインティングベクトルの大きさ $S(t)$ を求めよ。ただし、電極上の電荷分布は一様とする。

(3) Fig.1(b)に示すように、導体円板電極間に、半径 a 、厚さ d の誘電体を上電極に接するように入れた。上下の電極が電荷 $+Q, -Q$ でそれぞれ帯電しているとき、電極間の電界の大きさ E_2 を求めよ。また、電極間の静電容量 C_2 を求めよ。

(4) Fig.1(c)に示すように、導体円板電極間に、半径 $a/2$ 、厚さ $2d$ の誘電体を挿入した。誘電体の中心軸は電極の中心を通るものとする。上下の電極が電荷 $+Q, -Q$ でそれぞれ帯電しているとき、電極間の電界の大きさ E_3 を求めよ。また、電極間に働く力の大きさ F を求めよ。

As shown in Fig.1(a)~(c), two conducting circular disk electrodes with radius a are located in parallel. The electrodes are separated by a distance $2d$ ($\ll a$), and the interelectrode space is vacuum or partially filled with dielectric (permittivity ϵ). Answer the following questions. The permittivity and the permeability of the vacuum are ϵ_0 and μ_0 , respectively, and the edge effects of the electrodes can be ignored.

(1) As shown in Fig.1(a), the interelectrode space is vacuum and the top and bottom electrodes are charged with $+Q$ and $-Q$, respectively. Find the magnitude of electric field E_1 and the capacitance C_1 between the electrodes.

2016年3月実施
問題1 電磁気学
(2頁目 / 2頁中)

- (2) Charges on the top and bottom conducting circular disk electrodes shown in Fig.1(a) change in time as

$$+Q(t) = +Q_0 \cos \omega t, \quad -Q(t) = -Q_0 \cos \omega t,$$

respectively. Find the magnitude of the displacement current $J_1(t)$ and the magnitude of the magnetic flux density $B_1(t)$ at radius r ($< a$) between the electrodes. Find the magnitude of the Poynting vector $S(t)$ on the side surface of a cylinder with radius a and center axis c in the interelectrode space. The distribution of charges on the electrodes is uniform.

- (3) As shown in Fig.1(b), a dielectric of radius a and thickness d is inserted between the conducting circular disk electrodes in contact with the top electrode. The top and bottom electrodes are charged with $+Q$ and $-Q$, respectively. Find the magnitude of the electric field E_2 and the capacitance C_2 between the electrodes.
- (4) As shown in Fig.1(c), a dielectric of radius $a/2$ and thickness $2d$ is inserted between the conducting circular disk electrodes coaxially. The top and bottom electrodes are charged with $+Q$ and $-Q$, respectively. Find the magnitude of the electric field E_3 and the magnitude of the force F acting between the electrodes.

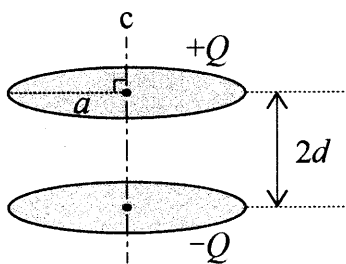


Fig. 1(a)

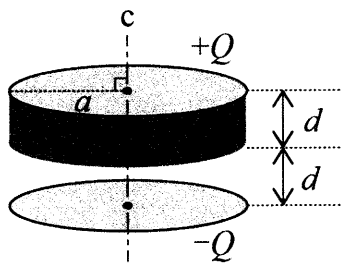


Fig. 1(b)

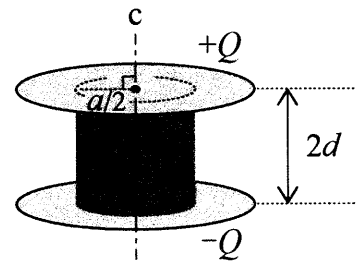


Fig. 1(c)

2016年3月実施
問題2 電気回路
(1頁目/1頁中)

- (1) Fig. 2 (a)のT形回路と Fig. 2 (b)の π 形回路の縦続行列を求めよ. 次に, Fig. 2 (a)のT形回路を Fig. 2 (b)の π 形回路に変換した場合, インピーダンス P_1, P_2, P_3 をインピーダンス T_1, T_2, T_3 で示せ. ここで, $T_1, T_2, T_3, P_1, P_2, P_3$ は0でも ∞ でもない.
- (2) Fig. 2 (c)の回路において, インピーダンス Z のフェーザ (ベクトル) 軌跡を描け.
- (3) Fig. 2 (d)に示すように, 特性インピーダンス Z_0 の無損失線路の受電端が短絡されている. 送電端から見た入力インピーダンス Z_{in} が次の値の時, それぞれの場合の線路長 ℓ を求めよ. 線路上の波長は λ とする. (i) $|Z_{in}| = Z_0$ (ii) $Z_{in} = 0$ (iii) $Z_{in} \rightarrow \pm\infty$

- (1) Give the chain matrices for the T-shape circuit of Fig. 2 (a) and the π -shape circuit of Fig. 2 (b). Next, when you convert the T-shape circuit of Fig. 2 (a) into the π -shape circuit of Fig. 2 (b), express the impedances $P_1, P_2,$ and P_3 in terms of the impedances $T_1, T_2,$ and T_3 . Here, $T_1, T_2, T_3, P_1, P_2,$ and P_3 are neither 0 nor ∞ .
- (2) In the circuit of Fig. 2 (c), draw a phaser (vector) track of impedance Z .
- (3) As shown in Fig. 2 (d), a lossless transmission line with the characteristic impedance Z_0 is short-circuited at the receiving end. When the input impedance Z_{in} viewed from the transmitting end is the following values, give the line length ℓ for each case. The wavelength on the line is set to λ .

- (i) $|Z_{in}| = Z_0$ (ii) $Z_{in} = 0$ (iii) $Z_{in} \rightarrow \pm\infty$

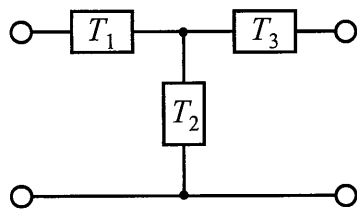


Fig. 2 (a)

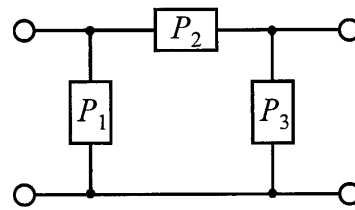


Fig. 2 (b)

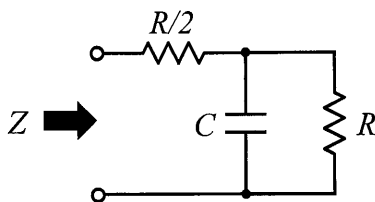


Fig. 2 (c)

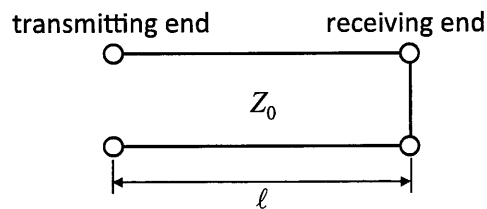


Fig. 2 (d)

2016年3月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目 / 1頁中)

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ とする. n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $n+1$ 個の実数 $(w_1, w_2, \dots, w_n, \theta)$ に対して

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n \geq \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と書けるとき, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ をしきい値関数という. 以下の問に答えよ. なお \wedge は論理積演算, \vee は論理和演算, \neg を否定演算とする.

- (1) 2変数論理関数 $\text{NAND}(x, y) = \overline{x \wedge y}$ がしきい値関数であることを示せ.
- (2) 2変数論理関数 $\text{EXOR}(x, y) = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$ がしきい値関数でないことを示せ.
- (3) 問(2)で定義された $\text{EXOR}(x, y)$ に対し, $\text{EXOR}(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ となる3つの2変数しきい値関数 f, g, h が存在するか判定し, その根拠を示せ.
- (4) $w_1 = 7, w_2 = -3, w_3 = -2, w_4 = -1, \theta = 0$ である4変数しきい値関数のカルノー図を示し, その最簡積和形を書け.

Consider $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$. An n -variable logic function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is called a threshold function, if it satisfies

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n \geq \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

for $n+1$ real numbers $(w_1, w_2, \dots, w_n, \theta)$. Answer the following questions. Denote AND, OR, and NOT operators by \wedge, \vee , and \neg , respectively.

- (1) Show that the 2-variable logic function $\text{NAND}(x, y) = \overline{x \wedge y}$ is a threshold function.
- (2) Show that the 2-variable logic function $\text{EXOR}(x, y) = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$ is not a threshold function.
- (3) For $\text{EXOR}(x, y)$ defined in the question (2), determine whether there exist three 2-variable logic functions f, g and h satisfying $\text{EXOR}(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$, and justify your answer.
- (4) Show the Karnaugh map to describe a 4-variable threshold function with $w_1 = 7, w_2 = -3, w_3 = -2, w_4 = -1$ and $\theta = 0$, and write its minimum sum-of-products form.

2016年3月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目/2頁中)

n 個の節点の集合 V と正の重みが付いた m 個の枝の集合 E からなる連結無向グラフ $G = (V, E)$ について考える. ある連結部分グラフ G' が G の全ての節点を含み, G' の枝の重みの合計が最小であるとき, G' を G の最小全域木と呼ぶ. 以下の問に答えよ.

- (1) Fig. 4 に与えられたグラフ G_1 の隣接行列, および G_1 の隣接リストをそれぞれ示せ.
- (2) G の隣接行列, および G の隣接リストを格納するのに必要な記憶域のサイズを, それぞれ O 記法で示せ.
- (3) Fig. 4 に与えられたグラフ G_1 の最小全域木を示せ.
- (4) G の最小全域木を求める効率のよいアルゴリズムを示せ.

Consider a connected undirected graph $G = (V, E)$, where V is a set of n nodes and E is a set of m edges with positive weights. A connected subgraph G' is called a minimum spanning tree of G , if G' contains all the nodes of G and the sum of the weights of the edges in G' is a minimum. Answer the following questions.

- (1) Show an adjacency matrix of graph G_1 given in Fig. 4, and an adjacency list of G_1 , respectively.
- (2) Give in O -notation the sizes of memory needed for storing an adjacency matrix of G and an adjacency list of G , respectively.
- (3) Describe a minimum spanning tree of graph G_1 given in Fig. 4.
- (4) Describe an efficient algorithm to find a minimum spanning tree of G .

2016年3月実施
問題4 情報基礎2
(2頁目/2頁中)

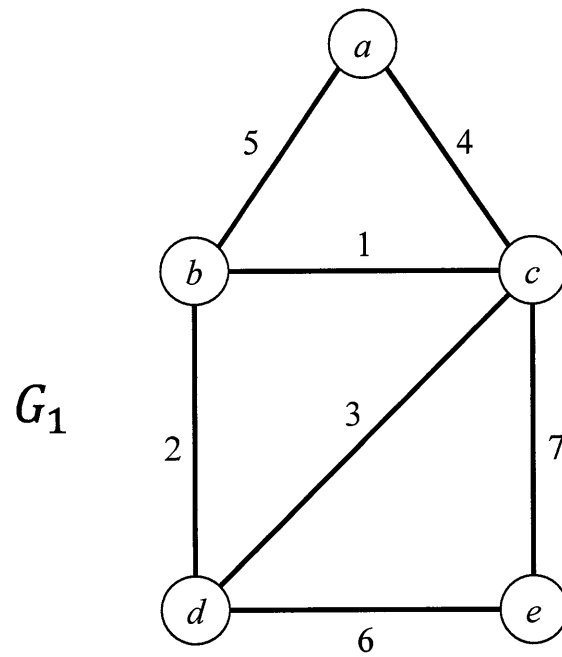


Fig. 4

2016年3月実施
問題5 物理基礎1
(1頁目 / 3頁中)

Fig. 5 に示すように、下向きに一定の力 Mg を受けている半径 a の等方的な剛体球が θ だけ傾いた面上で静止させられている。ここで、 M は球の質量、 g は重力加速度である。球は時刻 $t=0$ で静止状態から解放される。球と面との間の摩擦力 $F (\neq 0)$ はトルク $T = Fa$ を生じさせる。その結果、球は面上を転がっていく。球は面上で滑らないと仮定し、解放後の球の運動に対する以下の問に答えよ。 μ , v , ω , I を、それぞれ、球と面との間の静止摩擦係数、球の重心の速さ、転がりの角速度の大きさ、転がりに対する球の慣性モーメントとせよ。

- (1) ω は v に比例する。 $\frac{v}{\omega}$ の表現を求めよ。
- (2) 静止位置から測られた球の下向きの変位距離を h とする。(Fig. 5 を見よ。) 球の全運動エネルギーは $E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ で与えられる。 E を h の関数として表せ。
- (3) トルク T は $T = I \frac{d\omega}{dt}$ で与えられる。 T の表現を求めよ。
- (4) 面から球に対する垂直抗力 N を求めよ。
- (5) $F = \frac{T}{a}$ が球と面との間の摩擦力の最大値と等しくなる傾斜角 $\theta = \theta_{\text{Max}}$ を決めよ。 $\theta > \theta_{\text{Max}}$ の傾斜角の面上では球は滑る。
- (6) 球が均質と仮定して、 I を求めよ。ここで、デカルト (Cartesian) 座標系に対し剛体の慣性テンソルの各成分 I_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) は以下で与えられる。

$$I_{ij} = \int \rho(x_1, x_2, x_3) \left[\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

ここで、 x_i は座標 (x_1, x_2, x_3) の i 成分、 $\rho(x_1, x_2, x_3)$ は剛体の質量密度、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

2016 年 3 月実施
問題 5 物理基礎 1
(2 頁目 / 3 頁中)

As shown in Fig. 5, an isotropic rigid body sphere of radius a , which is subject to a constant downward force Mg , is held on a plane inclined at an angle of θ . Here, M is the mass of the sphere and g is the gravitational acceleration. The sphere is released from rest at time $t=0$. Friction force $F (\neq 0)$ between the sphere and the plane gives rise to torque $T = Fa$. As a result, the sphere rolls down the plane. Assume that the sphere does not slip on the plane, and answer the following questions concerning the motion of the sphere after release. Let μ , v , ω , and I be the coefficient of static friction between the plane and the sphere, the speed of the center of mass of the sphere, the magnitude of angular velocity of the rolling, and the moment of inertia of the sphere for the rolling, respectively.

- (1) ω is proportional to v . Obtain an expression for $\frac{v}{\omega}$.
- (2) Let h be a downward displacement of the sphere measured from the rest position. (See Fig. 5.) The total kinetic energy of the sphere is given by $E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. Express E as a function of h .
- (3) The torque T is given by $T = I\frac{d\omega}{dt}$. Derive an expression for T .
- (4) Obtain the normal force N from the plane on the sphere.
- (5) Determine the inclination angle $\theta = \theta_{\text{Max}}$ at which $F = \frac{T}{a}$ is equal to the maximum value of the friction force. The sphere slips on the plane with inclination angle $\theta > \theta_{\text{Max}}$.

2016年3月実施
問題5 物理基礎1
(3頁目 / 3頁中)

- (6) Assume that the sphere is homogeneous, and obtain I . Here, each component I_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) of the inertia tensor of a rigid body for a Cartesian coordinate system is given by

$$I_{ij} = \int \rho(x_1, x_2, x_3) \left[\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right] dx_1 dx_2 dx_3,$$

where x_i is the i -th component of a coordinate (x_1, x_2, x_3) , $\rho(x_1, x_2, x_3)$ is the mass density of the rigid body, and δ_{ij} is the Kronecker delta.

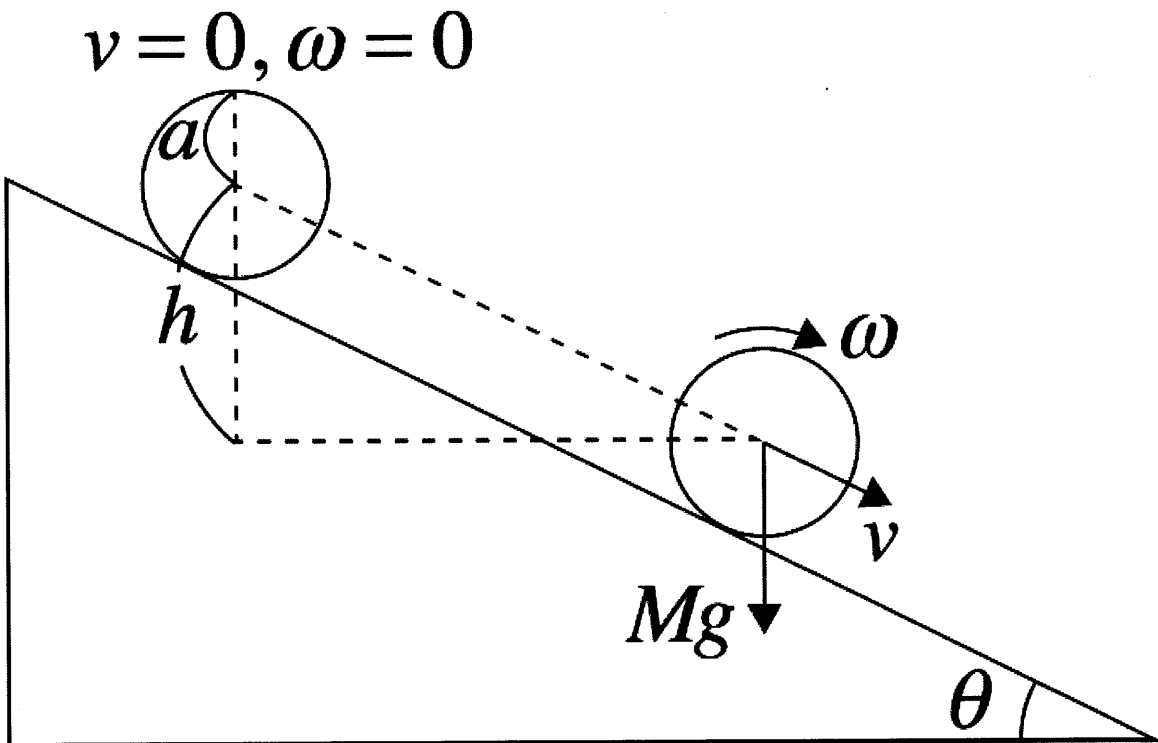


Fig. 5

2016年3月実施
問題6 物理基礎2
(1頁目 / 3頁中)

Fig. 6 に示すように $[111]$ 方向を回転軸とする回転操作 C_3 (反時計回りに $2\pi/3$ 回転) および C_3^{-1} (時計回りに $2\pi/3$ 回転) を考える. 3次元空間中の位置ベクトルを $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ (i, j, k は3次元直交座標系の各軸方向の単位ベクトル) とし, 関数 f_m ($m=1, 2, 3$) をそれぞれ $f_1(\mathbf{r}) = yz$, $f_2(\mathbf{r}) = zx$, $f_3(\mathbf{r}) = xy$ とする. この時, $C_3 f_m(\mathbf{r}) = f_m(C_3^{-1}\mathbf{r})$, すなわち $C_3 f_m(xi + yj + zk) = f_m(yi + zj + xk)$ が成り立つ. 以下の間に答えよ. ただし i は虚数単位である.

- (1) 以下の式中の α, β, γ に当てはまる関数を $f_1(\mathbf{r}), f_2(\mathbf{r}), f_3(\mathbf{r})$ の中から答えよ.

$$C_3 f_1(\mathbf{r}) = \alpha, \quad C_3 f_2(\mathbf{r}) = \beta, \quad C_3 f_3(\mathbf{r}) = \gamma$$

- (2) 関数 f_1, f_2, f_3 を基底として C_3 操作を表す行列 D_f を求めよ.

$$\text{ただし, } (C_3 f_1, C_3 f_2, C_3 f_3) = (f_1, f_2, f_3) D_f \text{ である.}$$

- (3) 関数 g_1, g_2, g_3 を f_1, f_2, f_3 の線形結合

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2f_1 - f_2 - f_3), \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_2 - f_3), \quad g_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(f_1 + f_2 + f_3)$$

と定義する. f_1, f_2, f_3 を g_1, g_2, g_3 へ移す基底変換行列 S を求めよ. ただし, $(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3) S$ である.

- (4) S が直交行列であることを示し, S の逆行列 S^{-1} を求めよ.

- (5) 関数 g_1, g_2, g_3 を基底とする場合, C_3 操作を表す行列 $D_g (= S^{-1} D_f S)$ は

$$D_g = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表されることを導け.

- (6) 関数 h_1, h_2, h_3 を g_1, g_2, g_3 の線形結合

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_1 - i g_2), \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_1 + i g_2), \quad h_3 = g_3$$

と定義する. g_1, g_2, g_3 を h_1, h_2, h_3 へ移す基底変換行列 T とその逆行列 T^{-1} を求めよ.

- (7) 関数 h_1, h_2, h_3 を基底とする場合, C_3 操作を表す行列を D_h とする. この時 C_3 を N 回繰り返す操作を表す行列 $(D_h)^N$ は

2016 年 3 月実施
問題 6 物理基礎 2
(2 頁目 / 3 頁中)

$$(D_h)^N = \begin{pmatrix} e^{2\pi Ni/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi Ni/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表されることを導け。ただし N は 0 もしくは正の整数である。

Consider the rotation operators C_3 (anticlockwise $2\pi/3$ rotation) and C_3^{-1} (clockwise $2\pi/3$ rotation) with the $[111]$ direction as the rotation axis as shown in Fig. 6. Let a position vector in three-dimensional space be $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ is each axis unit vector of the three-dimensional orthogonal coordinate system), and functions f_m ($m=1, 2, 3$) be $f_1(\mathbf{r}) = yz$, $f_2(\mathbf{r}) = zx$ and $f_3(\mathbf{r}) = xy$, respectively. Here, $C_3 f_m(\mathbf{r}) = f_m(C_3^{-1}\mathbf{r})$, that is, $C_3 f_m(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = f_m(y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k})$ is established. Answer the following questions. Here, i is the imaginary unit.

(1) Choose a function from $f_1(\mathbf{r}), f_2(\mathbf{r}), f_3(\mathbf{r})$ to satisfy α, β and γ in the following equations.

$$C_3 f_1(\mathbf{r}) = \alpha, \quad C_3 f_2(\mathbf{r}) = \beta, \quad C_3 f_3(\mathbf{r}) = \gamma.$$

(2) Find the matrix D_f which expresses the C_3 operation in terms of the basis set f_1, f_2, f_3 . Here,

$$(C_3 f_1, C_3 f_2, C_3 f_3) = (f_1, f_2, f_3) D_f.$$

(3) Functions g_1, g_2, g_3 are defined to be a linear combination of f_1, f_2, f_3 as

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2f_1 - f_2 - f_3), \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_2 - f_3), \quad g_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(f_1 + f_2 + f_3).$$

Find the basis transformation matrix S which transforms f_1, f_2, f_3 to g_1, g_2, g_3 .

$$\text{Here, } (g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3) S.$$

(4) Show that S is an orthogonal matrix, and find the inverse matrix of S , S^{-1} .

(5) Derive the matrix $D_g (= S^{-1} D_f S)$ which expresses the C_3 operation as

$$D_g = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

when the functions g_1, g_2, g_3 are taken as the basis set.

2016 年 3 月 実施
問題 6 物理基礎 2
(3 頁目 / 3 頁中)

(6) Functions h_1, h_2, h_3 are defined to be a linear combination of g_1, g_2, g_3 as

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_1 - i g_2), \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_1 + i g_2), \quad h_3 = g_3.$$

Find the basis transformation matrix T which transforms g_1, g_2, g_3 to h_1, h_2, h_3 , and find the inverse matrix of T , T^{-1} .

(7) When functions h_1, h_2, h_3 are taken as the basis set, let a matrix which expresses the C_3 operation be D_h . In this case, show that N repetitions of the C_3 operation $(D_h)^N$ can be expressed as

$$(D_h)^N = \begin{pmatrix} e^{2\pi Ni/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi Ni/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Here, N is 0 or any positive integer.

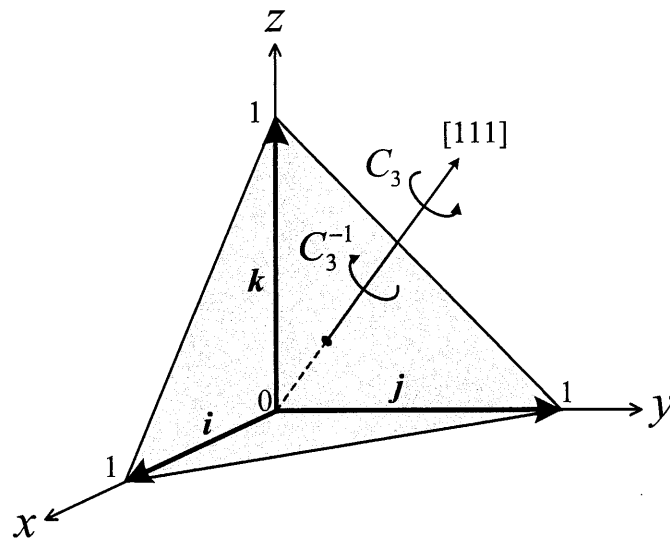


Fig. 6