Question No. 1: Electrical engineering (1/2)

2015 年 8 月実施
問題 1　電気工学
(１頁目／２頁中)

Fig. 1 のようなフィードバック制御系がある．$r(t)$は目標値，$y(t)$は制御量である．K_Tは正の定数である．

(1) $G_c(s)=1$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(a) このフィードバック制御系の閉ループ伝達関数 $G_o(s)$を求めよ．

(b) このフィードバック制御系の固有周波数ω_n を求めよ．また，減衰率が$\xi=0.5$ となる定数 K_Tを求めよ．

(c) 目標値が単位ランプ関数 $r(t)=t$ であるときの定常速度偏差ε_v を求めよ．

(2) $G_c(s)=\dfrac{K}{s+1}$ (但し，K は正の定数)，また $K_T=0.1$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(a) このフィードバック制御系の開ループ伝達関数 $G(s)$を求めよ．

(b) このフィードバック制御系の開ループ周波数伝達関数 $G(j\omega)$のゲイン$|G(j\omega)|$と位相$\angle G(j\omega)$を求めよ．

(c) このフィードバック制御系のナイキスト線図の概形を描け．また，位相交差周波数ω_πを求めよ．

(d) このフィードバック制御系が安定となる K の範囲を求めよ．

Consider the feedback control system shown in Fig. 1, where $r(t)$ and $y(t)$ denote the reference input and the controlled variable, respectively. The constant K_T is positive.

(1) Let $G_c(s)=1$. Answer the following questions.

(a) Find the closed-loop transfer function $G_o(s)$ of the feedback control system.

(b) Find the natural frequency ω_n of the feedback control system, and also find the constant K_T when the damping factor $\xi=0.5$.

(c) Find the steady-state velocity error ε_v, when the reference input is the unit ramp function $r(t)=t$.

2015 年 8 月実施
問題 1　電気工学
（２頁目／２頁中）

(2) Let $G_c(s) = \dfrac{K}{s+1}$, where the constant K is positive, and K_T = 0.1. Answer the following questions.

(a) Find the open-loop transfer function $G(s)$ of the feedback control system.

(b) Find the gain $|G(j\omega)|$ and phase $\angle G(j\omega)$ of the open-loop frequency transfer function $G(j\omega)$ of the feedback control system.

(c) Sketch the Nyquist diagram of the feedback control system, and find the phase crossover frequency ω_π.

(d) Find the range of values of K so that the feedback control system is stable.

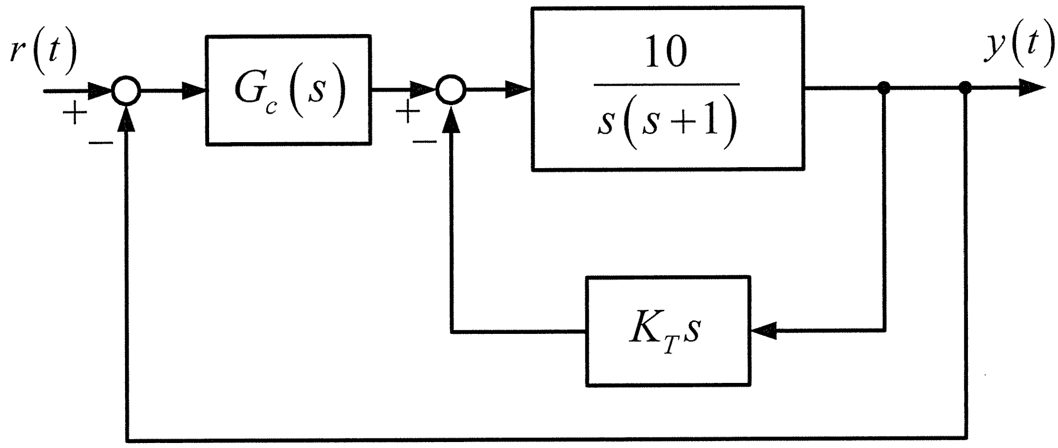

Fig. 1

2015 年 8 月実施
問題 2　通信工学
(1 頁目／2 頁中)

Fig. 2 に示す搬送波抑圧両側波帯振幅変調を用いた伝送系を考える．伝送路は理想的で損失はないものとする．送信機において，最大周波数が f_m である信号 $s(t)$を入力とし，信号 $x(t)$を出力とする．また，搬送波は $f_c(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ で与えられるものとする（但し $f_0 >> f_m$）．一方，受信機において局部発振波 $f_{LO}(t)$を用いて同期ホモダイン検波することを考える．ここで，受信機内において両側電力スペクトル密度が $N_0/2$ である白色雑音 $n(t)$が付加されるものとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $s(t)$のフーリエ変換 $S(f)$を用いて，送信機からの出力信号 $x(t)$の周波数スペクトルを求めよ．

(2) $f_{LO}(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$ で与えられる局部発振波を用いた同期ホモダイン検波回路を図示せよ．また，その復調過程を数式を用いて説明せよ．さらに，復調信号に付与される雑音 $n(t)$の影響について説明せよ．

(3) 局部発振波が位相誤差$\delta\phi$を含み $f_{LO}(t) = 2\cos(2\pi f_0 t + \delta\phi)$ と表される場合について，位相誤差$\delta\phi$が復調信号に及ぼす影響を述べよ．

2015 年 8 月実施
問題 2　通信工学
（2 頁目／2 頁中）

Consider a transmission system using double side-band amplitude modulation with suppressed carrier as shown in Fig. 2. The transmission line is assumed to be ideal and lossless. At the transmitter, a signal $s(t)$ with a maximum frequency of f_m is input, and a signal $x(t)$ is output. The carrier wave is given by $f_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ (where $f_0 >> f_m$). At the receiver, on the other hand, consider a synchronous homodyne detection with a local carrier $f_{LO}(t)$. Here, white noise $n(t)$ with the double-sided power spectral density of $N_0/2$ is assumed to be applied into the receiver. Answer the following questions.

(1) Derive the frequency spectrum of the output signal $x(t)$ from the transmitter using $S(f)$, which is Fourier transform of $s(t)$.

(2) Sketch a synchronous homodyne detection circuit using a local carrier wave given by $f_{LO}(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$. Then, explain the demodulation process with mathematical equations. Furthermore, explain the effect of the noise $n(t)$ applied to the demodulated signal.

(3) When the local carrier wave has a phase error $\delta\phi$ and is given by $f_{LO}(t) = 2\cos(2\pi f_0 t + \delta\phi)$, describe the effect of the phase error $\delta\phi$ on the demodulated signal.

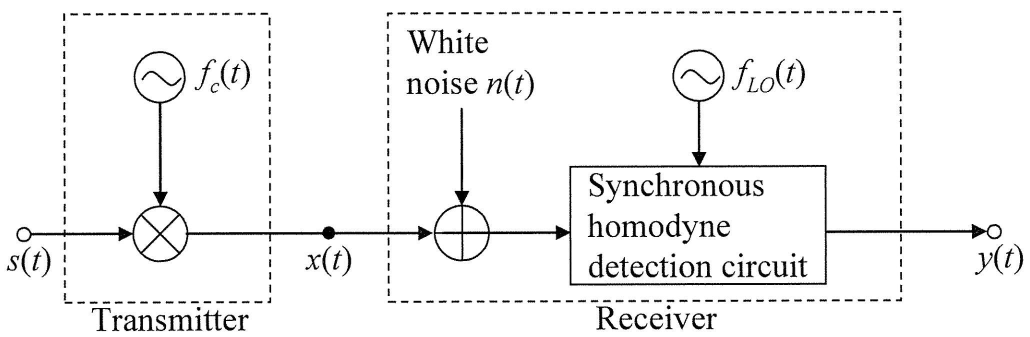

Fig. 2

2015 年 8 月実施
問題３　電子工学
(1 頁目／3 頁中)

Fig. 3(a) の回路について以下の問に答えよ．バイポーラトランジスタは活性領域で動作するものとする．

はじめに，回路の直流動作について考える．バイポーラトランジスタのエミッタ接地直流電流増幅率を β とする．

(1) V_B と I_B はそれぞれベースの電圧および電流，V_{BE} はベース・エミッタ間の電圧とする．V_B を I_B，V_{BE}，R_E および β で表せ．
(2) I_B を V_{CC}，R_1，R_2，V_{BE}，R_E および β で表せ．
(3) 出力電圧 V_O を V_{CC}，R_C，I_B および β で表せ．

次に，微小信号に対する回路の動作について考える．結合コンデンサ C_C のインピーダンスは無視できるものとする．バイポーラトランジスタの微小信号モデルとして Fig. 3(b) に示す簡略化 h パラメータモデルを用いること．

(4) C_E のインピーダンスが無視できる場合の微小信号等価回路を示し，回路の入力インピーダンスおよび電圧利得を求めよ．
(5) C_E を取り除いた場合の微小信号等価回路を示し，回路の入力インピーダンスおよび電圧利得を求めよ．

2015 年 8 月実施
問題３　電子工学
(2 頁目／3 頁中)

Answer the following questions about the circuit in Fig. 3(a). Assume that the bipolar transistor is operated in the active region.

First, consider the DC operation of the circuit. Let β be the common-emitter DC current gain of the bipolar transistor.

(1) Express V_B in terms of I_B, V_{BE}, R_E and β. Here, V_B and I_B are the voltage and the current, respectively, of the base, whereas V_{BE} is the voltage between the base and the emitter.

(2) Express I_B in terms of V_{CC}, R_1, R_2, V_{BE}, R_E and β.

(3) Express the output voltage V_O in terms of V_{CC}, R_C, I_B and β.

Next, consider the operation of the circuit for small signals. The impedance of the coupling capacitor C_C is assumed to be negligible. Use the simplified *h*-parameter model shown in Fig. 3(b) as a small-signal model of the bipolar transistor.

(4) Show the small-signal equivalent circuit in the case where the impedance of C_E is negligible, and derive the input impedance and the voltage gain of the circuit.

(5) Show the small-signal equivalent circuit in the case where C_E is removed, and derive the input impedance and the voltage gain of the circuit.

2015 年 8 月実施
問題３　電子工学

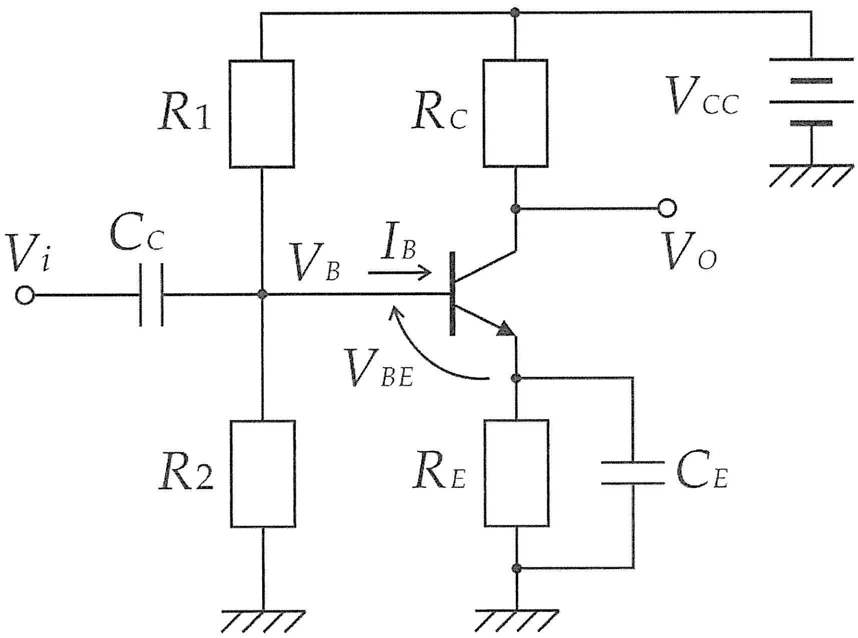

Fig. 3(a)

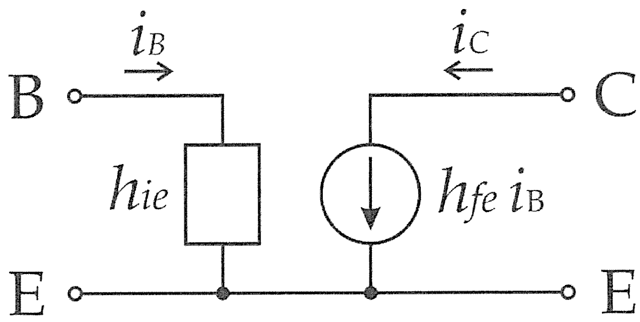

Fig. 3(b)

2015 年 8 月実施
問題4 計算機 1
(1 頁目／2 頁中)

クロック信号に同期して，各時刻に 1 ビット信号 $c \in \{0,1\}$ を受け取り，2 ビット信号 z_0, $z_1 \in \{0,1\}$ を出力する順序回路を考える．この回路の各状態 $s_i (0 \le i \le 3)$ は，Table 4 (a) に示す状態遷移表に従って変化し，初期状態は s_0 である．ここで，$p \bmod q$ は p を q で割った余りを意味する．以下の問に答えよ．

(1) この順序回路の状態遷移図を示せ．

(2) 現在の状態を表す状態信号を q_0, $q_1 \in \{0,1\}$, 次の状態を表す状態信号を Q_0, $Q_1 \in \{0,1\}$ とする．状態信号の状態への割り当ては Table 4 (b) に与えられる．出力信号 z_0, z_1 はそれぞれ状態信号 q_0, q_1 に等しいとする．この順序回路の励起式 (状態式)，及び出力式を，最簡積和形の論理式で表せ．

(3) この順序回路を，2 つの D フリップフロップ，及び任意の個数の NOT, AND, OR ゲートを用いて構成せよ．

Consider a sequential circuit which receives a 1-bit signal $c \in \{0,1\}$ and outputs two 1-bit signals z_0, $z_1 \in \{0,1\}$ in synchronization with a clock signal. Each state $s_i, 0 \le i \le 3$, of this sequential circuit changes according to the state-transition table shown in Table 4 (a), and the initial state is s_0. Here, $p \bmod q$ denotes the remainder of the division of p by q. Answer the following questions.

(1) Draw a state-transition diagram of this sequential circuit.

(2) Suppose that q_0, $q_1 \in \{0,1\}$ and Q_0, $Q_1 \in \{0,1\}$ are the present and next state signals, respectively. The assignment of the state signals to the states is shown in Table 4 (b). The output signals z_0 and z_1 are equal to q_0 and q_1, respectively. Show the excitation equations (state equations) and output equation of this sequential circuit using logical expressions in the minimum sum-of-products form.

(3) Draw a circuit diagram of this sequential circuit using two D flip-flops and an arbitrary number of NOT, AND and OR gates.

Table 4 (a)

Present state	Next state	
	$c = 1$	$c = 0$
s_i	$s_j \quad (j = (i+1) \bmod 4)$	s_i

Table 4 (b)

State	(q_0, q_1)
s_0	$(0, 0)$
s_1	$(0, 1)$
s_2	$(1, 1)$
s_3	$(1, 0)$

2015年 8月実施
問題5　計算機2
(1頁目／3頁中)

Fig. 5 (a) および Fig. 5 (b) で定義した，非負整数 n に対する再帰関数 $f(n)$ と $g(n)$ について以下の問に答えよ．ただし，式 “**if** $e_1 = e_2$ **then** e_3 **else** e_4” の値は，e_1 の値が e_2 の値と等しければ，e_3 の値に，そうでなければ e_4 の値に等しい．演算子 $+$，$-$，$*$ はそれぞれ整数加算，整数減算，行列乗算を表す．以下において，A^n は正方行列 A の n 乗を表す．ただし，A^0 は A と同じサイズの単位行列と定義する．

(1) $f(2)$，$f(3)$，$g(1)$，$g(2)$ を計算せよ．計算の過程も示すこと．

(2) 任意の非負整数 n について $g(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となることを帰納法を用いて証明せよ．

(3) 任意の非負整数 n について $g(n) = \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}$ となることを帰納法を用いて証明せよ．

(4) Fig. 5 (c) に示す構文に従い，任意の非負整数 n について以下の性質を満たす再帰関数 $h(n)$ の定義を書け．

- $g(n)$ の値と $h(n) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の値が等しい．
- $h(n)$ の値の計算に必要な再帰呼び出し回数が $O(\log n)$．

ただし，整数 n と m に対し，n を m で割ったときの商を求める関数 $\mathbf{div}(n, m)$ とその剰余を求める関数 $\mathbf{mod}(n, m)$ を用いてよい．また，任意の正方行列 A と非負整数 n に対し $A^{2n+1} = A(A^n)^2$ および $A^{2n} = (A^n)^2$ となることと，A^2 を求める関数 $\mathbf{square}(A)$ も用いてよい．

Answer the following questions about the recursive functions $f(n)$ and $g(n)$ for a non-negative integer n given in Fig. 5 (a) and Fig. 5 (b). Here, the value of "**if** $e_1 = e_2$ **then** e_3 **else** e_4" equals the value of e_3 if the values of e_1 and e_2 are equivalent, and otherwise equals the value of e_4. Operators $+$, $-$ and $*$ denote integer addition, integer subtraction, and matrix multiplication, respectively. In what follows, A^n denotes the nth power of A, where A^0 is defined as the identity matrix with the same size as A.

(1) Calculate $f(2)$, $f(3)$, $g(1)$ and $g(2)$. Show your working.

(2) Prove by induction that $g(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ for any non-negative integer n.

(3) Prove by induction that $g(n) = \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}$ holds for any non-negative integer n.

(4) Following the syntax shown in Fig. 5 (c), write the definition of a recursive function $h(n)$ that satisfies the following conditions for any non-negative integer n.

- The value of $g(n)$ equals the value of $h(n) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- The number of recursive calls required to calculate $h(n)$ is $O(\log n)$.

You may use the function $\mathbf{div}(n, m)$ that computes the quotient of n divided by m for integers n and m, and the function $\mathbf{mod}(n, m)$ that computes its remainder. You also may use the fact that $A^{2n+1} = A(A^n)^2$ and $A^{2n} = (A^n)^2$ for any square matrix A and non-negative integer n, and the function $\mathbf{square}(A)$ that computes A^2.

$$
\begin{aligned}
f(x) \quad = \quad & \\
& \textbf{if } x = 0 \textbf{ then} \\
& \quad 1 \\
& \textbf{else if } x = 1 \textbf{ then} \\
& \quad 1 \\
& \textbf{else} \\
& \quad f(x-1) + f(x-2)
\end{aligned}
$$

Fig. 5 (a)

$$
\begin{aligned}
g(x) \quad = \quad & \\
& \textbf{if } x = 0 \textbf{ then} \\
& \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \textbf{else} \\
& \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * g(x-1)
\end{aligned}
$$

Fig. 5 (b)

関数定義／function definition

$d ::= f(x) = e$

式／expression

$e ::= x$	(変数／variable)
$\mid\ n$	(整数定数／integer constant)
$\mid\ A$	(行列定数／matrix constant)
$\mid\ e_1 + e_2$	(整数加算／integer addition)
$\mid\ e_1 - e_2$	(整数減算／integer subtraction)
$\mid\ \textbf{div}(e_1, e_2)$	(整数除算の商／quotient of integer division)
$\mid\ \textbf{mod}(e_1, e_2)$	(整数除算の剰余／remainder of integer division)
$\mid\ e_1 * e_2$	(行列乗算／matrix multiplication)
$\mid\ \textbf{square}(e)$	(行列の二乗／square of matrix)
$\mid\ \textbf{if } e_1 = e_2 \textbf{ then } e_3 \textbf{ else } e_4$	(条件分岐／conditional branching)
$\mid\ f(e)$	(関数呼出／function call)

Fig. 5 (c)

2015年8月実施
問題6　物理専門1
(1頁目／2頁中)

ある系についての物理量（エルミート演算子）$\hat{Z}$, $\hat{X}$ および $\hat{Y}$ を考える．$\hat{Z}$ の固有値を a および $-a$ $(a>0)$，各々に対応する固有状態を $|+z\rangle$ および $|-z\rangle$ とする．ここで，$|+z\rangle$ および $|-z\rangle$ は規格化（正規化）されており，縮退はないものとする．このとき，この系の状態は一般に

$$|\psi\rangle = \alpha\,|+z\rangle + \beta\,|-z\rangle$$

と書ける．ただし，α および β は $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ を満たす複素数である．以下の問に答えよ．

(1) $|\psi\rangle$ に対する $\hat{Z}$ の期待値 $\langle Z\rangle$ を求めよ．

(2) $|\psi\rangle$ に対する $\hat{Z}$ の不確定性

$$\Delta Z = \sqrt{\langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2}$$

を求め，$\langle Z\rangle$ の関数として図示せよ．ただし，$\langle Z^2\rangle$ は $|\psi\rangle$ に対する $\hat{Z}^2$ の期待値である．

(3) $\hat{X}$ の固有値も a と $-a$ であり，各々に対応する規格化された固有状態を

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+z\rangle + |-z\rangle\right) \quad \text{および} \quad |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+z\rangle - |-z\rangle\right)$$

とする．このとき，

$$\hat{X}|+z\rangle = a|-z\rangle \quad \text{および} \quad \hat{X}|-z\rangle = a|+z\rangle$$

を示せ．また，$|\psi\rangle$ に対する $\hat{X}$ の期待値 $\langle X\rangle$ を求めよ．

(4) $\hat{Y}$ が

$$\hat{Y} = \frac{-i}{2a}[\hat{Z},\hat{X}]$$

で与えられるものとする．ここで，$[\hat{Z},\hat{X}] = \hat{Z}\hat{X} - \hat{X}\hat{Z}$，$i$ は虚数単位である．$\hat{Y}$ のすべての固有値およびそれらに対応する規格化された固有状態を求めよ．

(5) この系のハミルトニアンを

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{Z}$$

とする．ここで，$\hbar = h/2\pi$，h はプランク定数，ω は正の定数である．時刻 $t=0$ における系の状態が問 (3) の $|+x\rangle$ であったとき，$t \geq 0$ における $\hat{X}$ の期待値を求めよ．

2015年8月実施
問題6　物理専門1
(2頁目／2頁中)

Consider the physical quantities (Hermitian operators) $\hat{Z}$, $\hat{X}$, and $\hat{Y}$ of a system. The eigenvalues of $\hat{Z}$ are a and $-a$ $(a > 0)$ and the corresponding eigenstates are $|+z\rangle$ and $|-z\rangle$, respectively. Here, $|+z\rangle$ and $|-z\rangle$ are normalized and non-degenerate. In general, the system state is written as

$$|\psi\rangle = \alpha\,|+z\rangle + \beta\,|-z\rangle,$$

where α and β are complex values satisfying $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Answer the following questions.

(1) Obtain the mean value $\langle Z\rangle$ of $\hat{Z}$ for $|\psi\rangle$.

(2) Obtain the uncertainty

$$\Delta Z = \sqrt{\langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2},$$

of $\hat{Z}$ for $|\psi\rangle$, and plot it as a function of $\langle Z\rangle$. Here, $\langle Z^2\rangle$ is the mean value of $\hat{Z}^2$ for $|\psi\rangle$.

(3) The eigenvalues of $\hat{X}$ are also a and $-a$, and the corresponding eigenstates are

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+z\rangle + |-z\rangle\right) \quad \text{and} \quad |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+z\rangle - |-z\rangle\right),$$

respectively. Show that

$$\hat{X}|+z\rangle = a|-z\rangle \quad \text{and} \quad \hat{X}|-z\rangle = a|+z\rangle.$$

Then, obtain the mean value $\langle X\rangle$ of $\hat{X}$ for $|\psi\rangle$.

(4) Let $\hat{Y}$ be given by

$$\hat{Y} = \frac{-i}{2a}[\hat{Z}, \hat{X}],$$

where $[\hat{Z}, \hat{X}] = \hat{Z}\hat{X} - \hat{X}\hat{Z}$, and i is the imaginary unit. Obtain all the eigenvalues of $\hat{Y}$ and the corresponding normalized eigenstates.

(5) Let the Hamiltonian of the system be

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{Z},$$

where $\hbar = h/2\pi$, h is Planck's constant, and ω is a positive constant. Given that the system state at the time $t = 0$ is $|+x\rangle$ in question (3), obtain the mean value of $\hat{X}$ at $t \geq 0$.

2015 年 8 月実施
問題 7　物理専門 2
(1 頁目／2 頁中)

区間$-\infty < x < +\infty$における実変数xの関数

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha}\right)$$

とそのフーリエ変換

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\omega x)dx$$

を考える．ここで，iは虚数単位，αは正の実数である．以下の問に答えよ．

必要に応じて$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$を用いよ．ここで，$a$は正の実数である．

(1) $xf(x)$と$x^2 f(x)$が，それぞれ，区間$-\infty < x < +\infty$で絶対積分可能であることを示せ．

(2) $x^2 f(x)$のフーリエ変換を求めよ．

(3) $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega) = C(\omega)F(\omega)$を満たす関数$C(\omega)$を求めよ．

(4) $F(\omega)$を求めよ．

(5) 2 つの関数$g(x)$と$h(x)$の畳み込み積分は$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)h(x-y)dy$と定義され，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$のフーリエ変換をそれぞれ$F(\omega)$，$G(\omega)$，$H(\omega)$としたとき，$F(\omega) = \sqrt{2\pi}G(\omega)H(\omega)$と表せる．

積分方程式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right)dy = \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$$

の解$g(x)$を求めよ．

2015 年 8 月実施
問題 7　物理専門 2

Consider a function

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha}\right)$$

of a real value x in the interval $-\infty < x < +\infty$ and its Fourier transform

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\omega x)dx,$$

where i denotes the imaginary unit and α is a positive real number.

Answer the following questions.

If necessary, use $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, where a is a positive real number.

(1) Prove that $xf(x)$ and $x^2 f(x)$ are both absolutely integrable, respectively.

(2) Find the Fourier transform of $x^2 f(x)$.

(3) Find the function $C(\omega)$ satisfying $\frac{d}{d\omega}F(\omega) = C(\omega)F(\omega)$.

(4) Find $F(\omega)$.

(5) The convolution integral of two functions $g(x)$ and $h(x)$ is defined by

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)h(x-y)dy$ and can be written as $F(\omega) = \sqrt{2\pi}G(\omega)H(\omega)$, where $F(\omega)$, $G(\omega)$, $H(\omega)$ are Fourier transforms of $f(x)$, $g(x)$ and $h(x)$, respectively.

Find the solution $g(x)$ of the integral equation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right)dy = \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right).$$