

2014年8月実施  
問題1 電気工学  
(1頁目/2頁中)

Fig.1のような制御系がある. Fig.1(a)と Fig.1(b)に含まれる伝達関数 $G(s)$ は同一であり,

$$G(s) = \frac{s + \sqrt{3}}{(s + 1)^2} e^{-Ls}$$

で与えられる. ここで,  $L > 0$ である. Fig.1(b)は, Fig.1(a)の系において $G(s)$ の前にゲイン要素 $K > 0$ を挿入したものである. 次の間に答えよ. 必要があれば,  $\log_{10} 2 \approx 0.3$ ,  $\log_{10} 3 \approx 0.5$ と近似せよ.

- (1) 周波数伝達関数 $G(j\omega)$ の絶対値 $|G(j\omega)|$ と位相角 $\angle G(j\omega)$ [rad]を求めよ.
- (2) Fig.1(a)において,  $|G(j\omega)| = 1$ となる周波数, すなわちゲイン交差周波数を $\omega_c$ [rad/s]とする.  
 $\omega_c$ を求めよ.
- (3) Fig.1(a)において, 位相余裕 $PM$ [rad]を $L$ で表せ.
- (4) Fig.1(a)において,  $\angle G(j\omega) = -\pi$ [rad]となる周波数, すなわち位相交差周波数を $\omega_\pi$ [rad/s]とする.  
 $\omega_\pi = \sqrt{3}$ となるようなむだ時間 $L$ [s]の値を求めよ.
- (5) Fig.1(a)において,  $\omega_\pi = \sqrt{3}$ とする. ゲイン余裕 $GM$ [dB]を求めよ.
- (6) Fig.1(b)において,  $\omega_\pi = \sqrt{3}$ とする. 目標値が単位ステップ関数であるときの定常偏差を $\varepsilon$ とする.  
 $\varepsilon$ を $K$ で表せ.
- (7) Fig.1(b)において,  $\omega_\pi = \sqrt{3}$ とする. この制御系において $K$ を大きくしていくと, 問(6)で得られた $\varepsilon$ は小さくなるが, 安定性が悪くなる. 安定性を損なわない $\varepsilon$ の下限を求めよ.

Consider the control system shown in Fig.1. The transfer function  $G(s)$  included in Fig.1(a) and Fig.1(b) is the same and given by

$$G(s) = \frac{s + \sqrt{3}}{(s + 1)^2} e^{-Ls}$$

where  $L > 0$ . Fig.1(b) is the system in which a gain element  $K > 0$  is inserted in front of  $G(s)$  in Fig.1(a). Answer the following questions. If necessary, use the following approximation:  $\log_{10} 2 \approx 0.3$ ,  $\log_{10} 3 \approx 0.5$ .

- (1) Find the absolute value  $|G(j\omega)|$  and the phase angle  $\angle G(j\omega)$ [rad] of the frequency transfer

2014年8月実施  
問題1 電気工学  
(2頁目/2頁中)

function  $G(j\omega)$ .

- (2) In Fig.1(a), let  $\omega_c$  [rad/s] denote the gain crossover frequency defined as the frequency at which  $|G(j\omega)| = 1$ . Find  $\omega_c$ .
- (3) In Fig.1(a), express the phase margin  $PM$  [rad] in terms of  $L$ .
- (4) In Fig.1(a), let  $\omega_\pi$  [rad/s] denote the phase crossover frequency defined as the frequency at which  $\angle G(j\omega) = -\pi$  [rad]. Find the value of the dead time  $L$  [s] so that  $\omega_\pi = \sqrt{3}$ .
- (5) In Fig.1(a), let  $\omega_\pi = \sqrt{3}$ . Find the gain margin  $GM$  [dB].
- (6) In Fig.1(b), let  $\omega_\pi = \sqrt{3}$ , and  $\varepsilon$  denote the steady state error in the case where the reference input is a unit step function. Express  $\varepsilon$  in terms of  $K$ .
- (7) In Fig.1(b), let  $\omega_\pi = \sqrt{3}$ . In this control system, increasing in  $K$  decreases  $\varepsilon$  given in question (6) but makes the system unstable. Find the lower limit of  $\varepsilon$  under the condition that the system is stable.

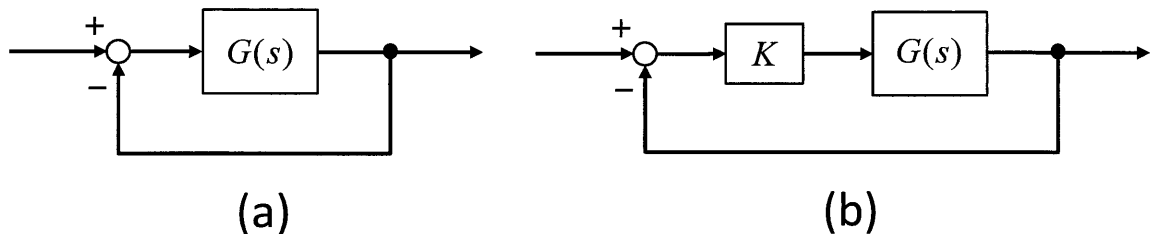


Fig.1

2014 年 8 月実施  
問題 2 通信工学  
( 1 頁目 / 3 頁中)

搬送波抑圧両側波帯振幅変調 (DSB-SC) を用いた Fig. 2(a)に示す伝送系を考える. 伝送路は理想的で損失はないものとする. 受信機中の帯域通過フィルタ (BPF) は, 次式で与えられるインパルス応答  $h(t)$ を持つものとする.

$$h(t) = \exp\left\{-\frac{(t/T)^2}{2}\right\} \cos(2\pi f'_m t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

ただし,  $T$ は定数,  $f'_m$ は BPF の中心周波数である. 送信機には, Fig. 2(b)に示すようなスペクトル成分 ( $\delta(f+f_m)$ と  $\delta(f-f_m)$ )を有する信号  $s(t)$ が入力されている. 送信機の搬送波を  $A_c \cos(2\pi f_c t)$ , 受信機の局部発振器信号を  $\cos(2\pi f_c t)$ とする. ここで,  $A_c$ および  $f_c$ はそれぞれ搬送波の振幅および周波数であり,  $1/T \ll f'_m \approx f_m \ll f_c$ である. 以下の間に答えよ.

(1) Fig. 2(a)の A 点における DSB-SC 変調信号  $x(t)$ を求めよ.

(2) BPF の伝達関数  $H(f)$ を求め, そのスペクトルを描け. 必要ならば  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$  を用いよ.

(3) Fig. 2(a)の B 点における受信機 BPF 出力  $y(t)$ の信号成分を求めよ. 必要ならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) df = \delta(t), \quad \exp(-t^2) \approx 0 \quad (|t| \gg 1) \text{ を用いよ.}$$

(4) 受信機 BPF 出力  $y(t)$ の信号対雑音電力比 (S/N) を求めよ. ただし, 受信機に入力される白色雑音  $n(t)$ の両側電力スペクトル密度は  $N_0/2$  であるものとする.

2014年8月実施  
問題2 通信工学  
(2頁目/3頁中)

Consider a transmission system using double side-band amplitude modulation with suppressed carrier (DSB-SC) as shown in Fig. 2(a). The transmission line is assumed to be ideal and lossless. The band pass filter (BPF) in the receiver has an impulse response  $h(t)$  expressed as follows,

$$h(t) = \exp\left\{-\left(t/T\right)^2\right\} \cos(2\pi f'_m t) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Here,  $T$  is a constant,  $f'_m$  is the center frequency of the BPF. A signal  $s(t)$ , which has spectrum components  $(\delta(f+f_m)$  and  $\delta(f-f_m))$  as shown in Fig. 2(b), is fed to the input of the transmitter. The carrier wave at the transmitter is  $A_c \cos(2\pi f_c t)$ , and the local oscillator signal at the receiver is  $\cos(2\pi f_c t)$ . Here,  $A_c$  and  $f_c$  are the amplitude and the frequency of the carrier, respectively, and  $1/T \ll f'_m \approx f_m \ll f_c$ . Answer the following questions.

- (1) Derive the DSB-SC signal  $x(t)$  at the point A in Fig. 2(a).
- (2) Derive the BPF transfer function  $H(f)$ , and draw its spectrum. Use  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$  if necessary.
- (3) Derive the receiver BPF output  $y(t)$  at the point B in Fig. 2(a). Use  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) df = \delta(t)$ ,  $\exp(-t^2) \approx 0$  ( $|t| \gg 1$ ) if necessary.
- (4) Derive the signal-to-noise power ratio (S/N) of the receiver BPF output  $y(t)$ . The double-sided power spectrum density of the white noise  $n(t)$  input into the receiver is assumed to be  $N_0/2$ .

2014年8月実施  
問題2 通信工学  
( 3頁目 / 3頁中)

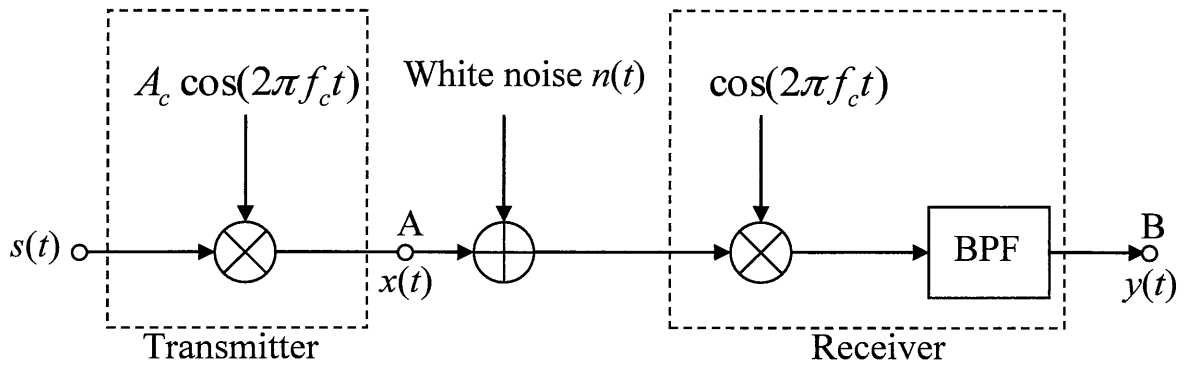


Fig. 2(a)

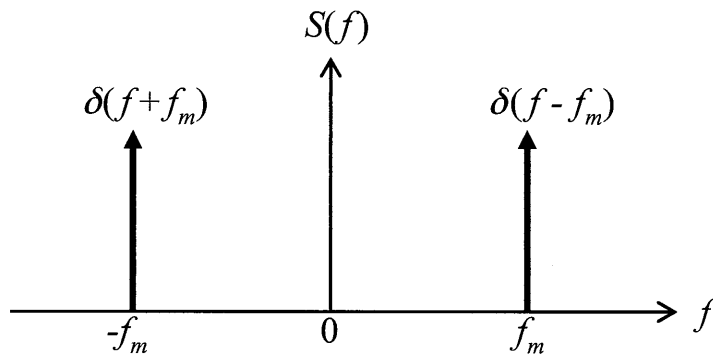


Fig. 2(b)

2014年8月実施  
問題3 電子工学  
(1頁目/3頁中)

npnバイポーラトランジスタを用いた増幅回路について以下の問に答えよ。npnバイポーラトランジスタの簡略化したモデルとして、Fig. 3(a)を用いること。

- (1) Fig. 3(b)に示す回路の微小信号等価回路を示せ。
- (2) 問(1)の回路の入力インピーダンス  $Z_{in}$ 、出力インピーダンス  $Z_{out}$  を求めよ。入力信号の周波数は十分に高く、コンデンサ  $C_1$ 、 $C_2$  のインピーダンスが無視できるとしてよい。
- (3) コンデンサ  $C_2$  を除くと Fig. 3(b) の回路の動作はどのように変化するか、回路の電圧利得  $K$  ( $=V_o/V_i$ ) を求めて説明せよ。
- (4) Fig. 3(b) の回路は電流帰還バイアス回路である。温度変化などの外乱に対して回路の動作が安定となる理由を説明せよ。
- (5) Fig. 3(c)に示す回路の微小信号等価回路を示せ。
- (6) 問(5)の回路の入力インピーダンス  $Z_{in}$ 、出力インピーダンス  $Z_{out}$  を求めよ。入力信号の周波数は十分に高く、コンデンサ  $C_3$  のインピーダンスが無視できるとしてよい。
- (7) Fig. 3(c) の回路は電圧帰還バイアス回路である。温度変化などの外乱に対して回路の動作が安定となる理由を説明せよ。

2014年8月実施  
問題3 電子工学  
(2頁目/3頁中)

Answer the following questions on the amplifier circuit using an npn bipolar transistor. As a simplified model of the npn transistor, use Fig. 3(a).

- (1) Show the small-signal equivalent circuit of Fig. 3(b).
- (2) Derive the input impedance ( $Z_{in}$ ) and the output impedance ( $Z_{out}$ ) of the circuit of question (1). Here, assume the frequency of the input signal is high and the impedance of the capacitors ( $C_1$ ,  $C_2$ ) can be ignored.
- (3) When the capacitor  $C_2$  is removed, derive the voltage gain  $K (=V_o / V_i)$  and explain the change of the behavior of the circuit shown in Fig. 3(b).
- (4) The circuit in Fig. 3(b) is a biasing circuit based on current feedback. Explain the reason why the behavior of the circuit becomes stable against disturbances such as a change of temperature.
- (5) Show the small-signal equivalent circuit of Fig. 3(c).
- (6) Derive the input impedance ( $Z_{in}$ ) and the output impedance ( $Z_{out}$ ) of the circuit of question (5). Here, assume the frequency of the input signal is high and the impedance of the capacitor  $C_3$  can be ignored.
- (7) The circuit in Fig. 3(c) is a biasing circuit based on voltage feedback. Explain the reason why the behavior of the circuit becomes stable against disturbances such as a change of temperature.

2014年8月実施  
問題3 電子工学  
(3頁目/3頁中)

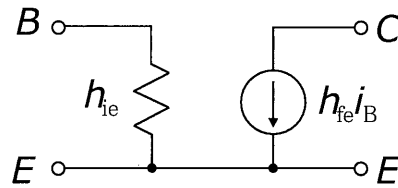


Fig. 3 (a)

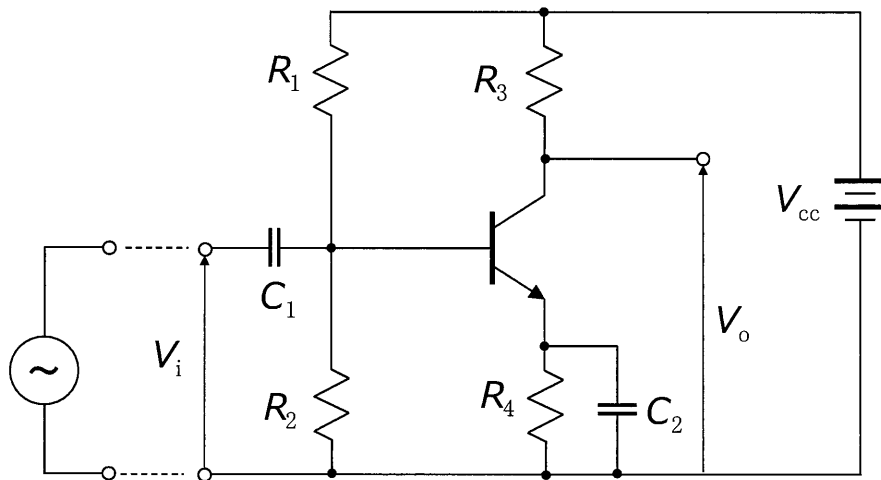


Fig. 3 (b)

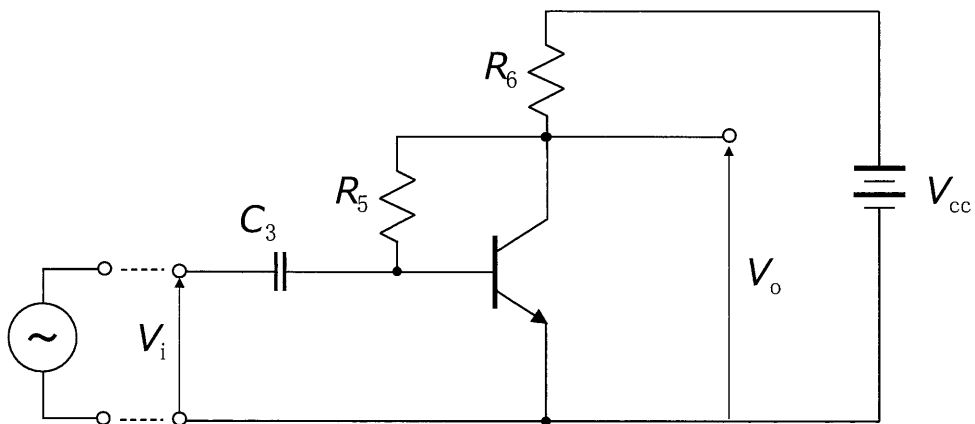


Fig. 3 (c)



2014年8月実施  
問題4 計算機1  
(1頁目/1頁中)

クロックに同期して、各時刻  $t=1,2,\dots$  に2つの1ビット信号  $a_t, b_t \in \{0,1\}$  を受け取り、1ビット信号  $z_t \in \{0,1\}$  を出力する順序回路を考える。本順序回路は、 $(a_t a_{t-1} \dots a_2 a_1)_2 \geq (b_t b_{t-1} \dots b_2 b_1)_2$  のとき1を出力し、それ以外では0を出力する。ただし、 $( )_2$  は2進数の値を表す。

- (1) 入力系列  $a_4 a_3 a_2 a_1 = 1100$ ,  $b_4 b_3 b_2 b_1 = 1001$  に対する出力系列  $z_4 z_3 z_2 z_1$  を示せ。
- (2) 本順序回路の状態遷移図を示せ。ただし、 $(a_t a_{t-1} \dots a_2 a_1)_2 \geq (b_t b_{t-1} \dots b_2 b_1)_2$  の状態を  $S_1$ 、それ以外の状態を  $S_0$  とする。
- (3) 本順序回路の励起式(状態式)及び出力式を、AND, OR, NOT を用いた最簡積和形で示せ。ただし、現在の状態を表す状態信号を  $y \in \{0,1\}$ 、次の状態を表す状態信号を  $Y \in \{0,1\}$  とする。また、状態割り当ては  $S_0 \leftrightarrow y=0$ ,  $S_1 \leftrightarrow y=1$  とする。
- (4) D フリップフロップ一つと適当な論理ゲートを用いて本順序回路の回路図を示せ。D フリップフロップの初期状態も示すこと。

Consider a sequential circuit which receives two 1-bit signals  $a_t, b_t \in \{0,1\}$  and outputs one 1-bit signal  $z_t \in \{0,1\}$  at each time  $t=1,2,\dots$  in synchronization with a clock. The sequential circuit outputs 1 when  $(a_t a_{t-1} \dots a_2 a_1)_2 \geq (b_t b_{t-1} \dots b_2 b_1)_2$ , and outputs 0 otherwise. Here  $( )_2$  denotes the value of a binary number.

- (1) Show the output sequence  $z_4 z_3 z_2 z_1$  corresponding to the input sequences  $a_4 a_3 a_2 a_1 = 1100$  and  $b_4 b_3 b_2 b_1 = 1001$ .
- (2) Draw a state-transition diagram of the sequential circuit. Suppose that the state is  $S_1$  when  $(a_t a_{t-1} \dots a_2 a_1)_2 \geq (b_t b_{t-1} \dots b_2 b_1)_2$  and the state is  $S_0$  otherwise.
- (3) Show the excitation equation (state equation) and output equation of the sequential circuit with the minimum sum-of-products form composed of AND, OR, and NOT. Suppose that  $y \in \{0,1\}$  and  $Y \in \{0,1\}$  are the current and next state signals, respectively. Suppose also that the state assignment is given by  $S_0 \leftrightarrow y=0$  and  $S_1 \leftrightarrow y=1$ .
- (4) Draw a circuit diagram of the sequential circuit using a D flip-flop and adequate logic gates. Specify the initial state of the D flip-flop.

2014年8月実施  
問題5 計算機2  
(1頁目 / 1頁中)

Fig. 5 に示す再帰関数  $f$  を考える。ここで、関数  $\text{mod}(x, y)$  は整数  $x$  を整数  $y$  で割った余りを返し、式 “if  $e_1=e_2$  then  $e_3$  else  $e_4$ ” の値は、 $e_1$  の値が  $e_2$  の値に等しければ  $e_3$  の値に、そうでなければ  $e_4$  の値に等しい。また、入力  $p$  と  $q$  ( $p \geq q$ ) は非負の整数であると仮定する。 $f$  に関する以下の問に答えよ。

- (1)  $f(901, 255)$  を計算せよ。計算の過程も示すこと。
- (2) 任意の非負の整数  $p$  と  $q$  ( $p \geq q$ ) に対して、 $f(p, q)$  の計算が停止することを示せ。
- (3)  $f(p, q)$  を計算する際、 $n$  回目の再帰関数呼び出しにおける  $q$  の値を  $q_n$  で表す。 $n$  回目 ( $n \geq 3$ ) の再帰関数呼び出しが行われた場合、 $q_n < \frac{q_{n-2}}{2}$  が成り立つことを示せ。
- (4) 問(3) の関係を用いて、 $f(p, q)$  ( $q > 0$ ) を計算するための再帰関数呼び出しの回数は  $O(\log q)$  であることを示せ。

Consider the recursive function  $f$  shown in Fig. 5. Here, the function  $\text{mod}(x, y)$  returns the remainder of integer  $x$  divided by integer  $y$ , and the value of the expression “if  $e_1=e_2$  then  $e_3$  else  $e_4$ ” equals the value of  $e_3$  if the value of  $e_1$  is equivalent to the value of  $e_2$ , and equals the value of  $e_4$  otherwise. Furthermore, assume that the inputs  $p$  and  $q$  ( $p \geq q$ ) are non-negative integers. Answer the following questions about  $f$ .

- (1) Calculate  $f(901, 255)$ . Show your working.
- (2) Show that the calculation of  $f(p, q)$  terminates for any non-negative integers  $p$  and  $q$  ( $p \geq q$ ).
- (3) Let  $q_n$  represent the value of  $q$  at the  $n$ -th recursive function call to calculate  $f(p, q)$ . Show that  $q_n < \frac{q_{n-2}}{2}$  holds when the  $n$ -th ( $n \geq 3$ ) recursive function call takes place.
- (4) Using the relation in question (3), show that the number of the recursive function calls required to calculate  $f(p, q)$  ( $q > 0$ ) is  $O(\log q)$ .

```
f(p, q) =  
    if q=0 then p  
    else f(q, mod(p, q))
```

Fig. 5

2014 年 8 月実施  
問題 6 物理専門 1  
(1 頁目 / 3 頁中)

一次元ポテンシャル井戸

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ -V_0 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases} \quad (6A)$$

を考える (Fig. 6(a)). 質量  $m$ , エネルギー  $E (> 0)$  の粒子が  $x < 0$  の領域からこの井戸に入射する. 以下の問に答えよ. 粒子の波動関数を  $\varphi(x)$  とせよ. 必要に応じて  $\hbar = h/(2\pi)$  を用いよ. ここに  $h$  はプランク定数である.

- (1) 領域  $x < 0$  における, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け.
- (2) 領域  $0 \leq x \leq a$  における, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け.
- (3) 領域  $x > a$  における, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け.
- (4) 領域  $x < 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $x > a$  における  $\varphi(x)$  をそれぞれ

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0) \\ De^{ik'x} + Fe^{-ik'x} & (0 \leq x \leq a) \\ Ce^{ikx} & (x > a) \end{cases} \quad (6B)$$

とおく.  $k$  と  $k'$  を求めよ.

- (5) 式(6B)に与えられる  $\varphi(x)$  の表式を用い,  $x = 0$  および  $x = a$  における  $\varphi(x)$  およびその空間微分  $\varphi'(x)$  の境界条件を全て求めよ.
- (6) 問(5)で得られた境界条件から, 入射粒子が井戸の上を通り抜ける透過確率  $T$  は

$$T \equiv \frac{|C|^2}{|A|^2} = \left[ 1 + \frac{V_0^2 \sin^2 k'a}{4E(E+V_0)} \right]^{-1} \quad (6C)$$

と与えられる.  $T$  はエネルギー  $E$  に対して Fig. 6(b) に示されるような振動的な振舞いを見せる.  $T$  が極大となる一群の  $E$  の値を求め, この結果の物理的意味を論ぜよ.

2014 年 8 月実施  
問題 6 物理専門 1  
(2 頁目 / 3 頁中)

Consider a one-dimensional potential well

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ -V_0 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases} \quad (6A)$$

A particle with mass  $m$  and energy  $E (> 0)$  is incident to this well from the  $x < 0$  region (Fig. 6(a)). Answer the following questions. Let the wave function of the particle be  $\varphi(x)$ . Use  $\hbar = h/(2\pi)$  if necessary. Here,  $h$  is the Planck's constant.

- (1) Write the time-independent Schrödinger equation for the region  $x < 0$ .
- (2) Write the time-independent Schrödinger equation for the region  $0 \leq x \leq a$ .
- (3) Write the time-independent Schrödinger equation for the region  $x > a$ .
- (4) Let  $\varphi(x)$  in regions  $x < 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ , and  $x > a$  be

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0) \\ De^{ik'x} + Fe^{-ik'x} & (0 \leq x \leq a) \\ Ce^{ikx} & (x > a) \end{cases} \quad (6B)$$

Obtain  $k$  and  $k'$ .

- (5) Using the expressions for  $\varphi(x)$  given in (6B), obtain all the boundary conditions for  $\varphi(x)$  and its spatial derivative  $\varphi'(x)$  at  $x = 0$  and  $x = a$ .
- (6) Using the boundary conditions obtained in question (5), the transmission probability  $T$ , with which the incident particle passes over the well, is given by

$$T \equiv \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left[ 1 + \frac{V_0^2 \sin^2 k'a}{4E(E + V_0)} \right]^{-1}. \quad (6C)$$

$T$  shows an oscillatory behavior as a function of the energy  $E$ , as shown in Fig. 6(b). Obtain the series of energy values  $E$  at which  $T$  shows maxima, and discuss the physical meaning of this result.

2014年8月実施  
問題6 物理専門1  
(3頁目/3頁中)

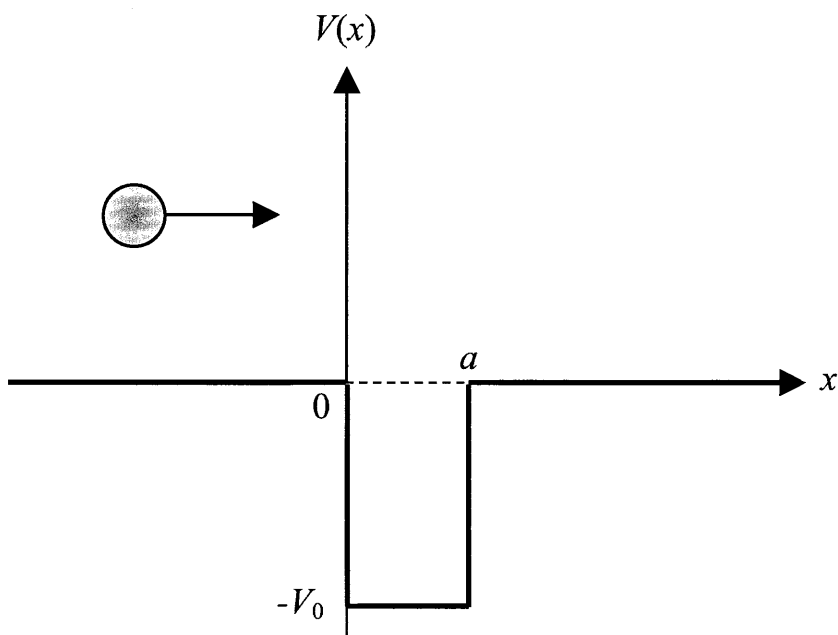


Fig. 6(a)

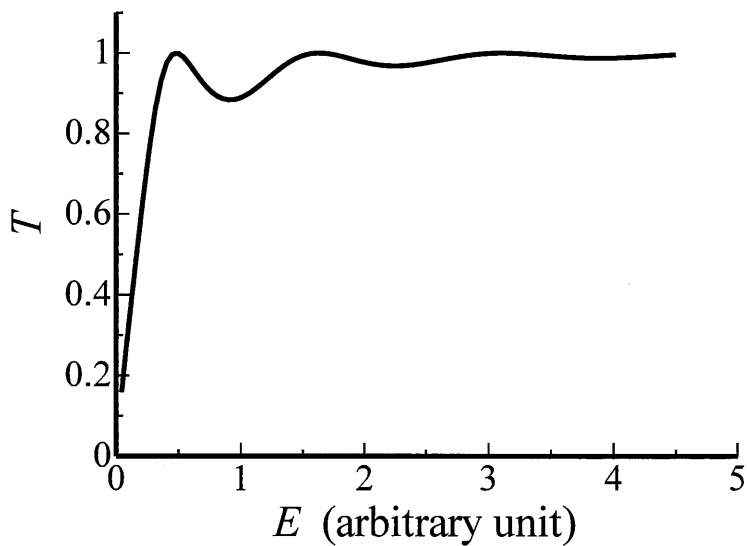


Fig. 6(b)

2014 年 8 月実施  
問題 7 物理専門 2  
(1 頁目 / 3 頁中)

区間  $-\infty < x < +\infty$  における実数  $x$  の関数

$$f(x) = \begin{cases} \pi & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

を考える. また, 区間  $-\infty < x < +\infty$  において次の微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x) - g(x) = f(x)$$

を満足する関数  $g(x)$  を考える.  $g(x)$ ,  $\frac{d}{dx}g(x)$  および  $\frac{d^2}{dx^2}g(x)$  は区間  $-\infty < x < +\infty$  で有界,

連続かつ絶対積分可能な関数であるとする.  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は, 以下のように定義された積分路である (Fig. 7).

$$C_1: z = t \quad (r \leq t \leq R),$$

$$C_2: z = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq \pi),$$

$$C_3: z = t \quad (-R \leq t \leq -r),$$

$$C_4: z = re^{i(\pi-t)} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

ただし,  $z$  は複素変数,  $t$  は媒介変数である. また,  $r$  と  $R$  はそれぞれ  $0 < r < 1, 1 < R$  を満たす実数である.  $i$  は虚数単位である. 以下の問に答えよ.

(1)  $u$  を正の実数とすると, 複素積分  $\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \frac{-e^{iuz}}{z(z^2+1)} dz$  を求めよ.

(2) 関数  $f(x)$  のフーリエ変換  $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$  を求めよ.

(3) 関数  $g(x)$  のフーリエ変換  $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\omega x} dx$  を求めよ.

(4) 実数  $\omega$  および  $x$  の関数  $H(\omega, x) = \frac{-e^{i\omega x}}{\omega(\omega^2+1)}$  を考える.

$$g(x) = \frac{1}{2i} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega, x+1) d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega, x-1) d\omega \right) \text{となることを示せ.}$$

(5) 実数  $x$  に対して関数  $g(x)$  を求めよ. 1 位の極  $\alpha$  を持つ複素関数  $k(z)$  に対して,

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_C k(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}_{z=\alpha} k(z) \text{となることを用いてよい. ただし, } C \text{ は}$$

$$C: z = \alpha + qe^{i\theta} \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi, 0 < q) \text{ と定義される積分路である.}$$

2014 年 8 月 実施  
問題 7 物理専門 2  
(2 頁目 / 3 頁中)

Consider a function

$$f(x) = \begin{cases} \pi & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

of a real number  $x$  in the interval  $-\infty < x < +\infty$ . Also, consider a function  $g(x)$  satisfying the following differential equation:

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x) - g(x) = f(x)$$

in the interval  $-\infty < x < +\infty$ . Assume that  $g(x)$ ,  $\frac{d}{dx}g(x)$  and  $\frac{d^2}{dx^2}g(x)$  are bounded, continuous and absolutely integrable functions in the interval  $-\infty < x < +\infty$ .  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  and  $C_4$  are integral paths defined as follows (Fig. 7),

$$\begin{aligned} C_1 : z = t & \quad (r \leq t \leq R), \\ C_2 : z = Re^{it} & \quad (0 \leq t \leq \pi), \\ C_3 : z = t & \quad (-R \leq t \leq -r), \\ C_4 : z = re^{i(\pi-t)} & \quad (0 \leq t \leq \pi). \end{aligned}$$

Here  $z$  is a complex variable, and  $t$  is a parameter. Also,  $r$  and  $R$  are real numbers satisfying  $0 < r < 1$  and  $1 < R$ , respectively. Let  $i$  denote the imaginary unit. Answer the following questions.

- (1) When  $u$  is a positive real number, find the value of the complex integral

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \frac{-e^{iuz}}{z(z^2+1)} dz.$$

- (2) Find the Fourier transformation  $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$  of the function  $f(x)$ .

- (3) Find the Fourier transformation  $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\omega x} dx$  of the function  $g(x)$ .

- (4) Consider a function  $H(\omega, x) = \frac{-e^{i\omega x}}{\omega(\omega^2+1)}$  of real numbers  $\omega$  and  $x$ . Prove

$$g(x) = \frac{1}{2i} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega, x+1) d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega, x-1) d\omega \right).$$

- (5) Find the function  $g(x)$  for a real number  $x$ . You may use  $\lim_{q \rightarrow 0} \int_C k(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}_{z=\alpha} k(z)$  that holds for a complex function  $k(z)$  having a simple pole  $\alpha$ . Here,  $C$  is an integral path defined as  $C : z = \alpha + qe^{i\theta}$  ( $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ,  $0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ ,  $0 < q$ ).

2014 年 8 月 実施  
問題 7 物理 専門 2  
( 3 頁目 / 3 頁中 )

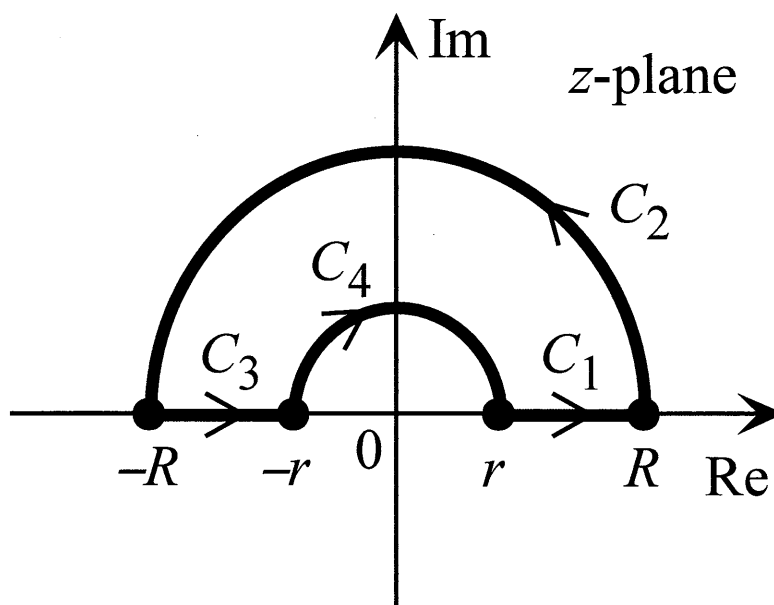


Fig. 7